

Projektovanje IIR digitalnih filtara

IIR – Infinite Impulse Response – Beskonačan impulsni odziv



Katedra za elektroniku
prof dr Lazar Saranovac

Digitalna obrada signala - 2022/23

1

1

FILTRIRANJE

Obrada signala u kojoj se neke harmonijske komponente potiskuju a neke promovišu.

U procesu filtriranja harmonijskim komponentama se menjaju amplitude i fazni stavovi.

Po pravilu obrada u vremenskom domenu.

U praksi funkcija prenosa sistema koja treba da se sintetizuje najčešće ima filtarsko svojstvo, tj. pojačava ili propušta bez slabljenja signale iz nekog opsega učestanosti, dok slabi signale iz nekog drugog opsega učestanosti, faza sinteze se obično naziva

*sinteza filtarskih funkcija ili
postupak aproksimacije*



Katedra za elektroniku

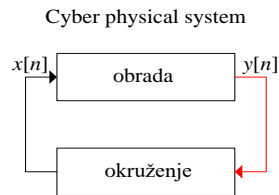
Digitalna obrada signala - 2022/23

2

2

Proces filtriranja može da se obavi i u frekventnom domenu.
Množenjem frekventnih karakteristika signala i filtra.

Mnogo češća situacija je da se filtriranje radi u vremenskom domenu,
a dosta često je potreba da se radi u realnom vremenu.



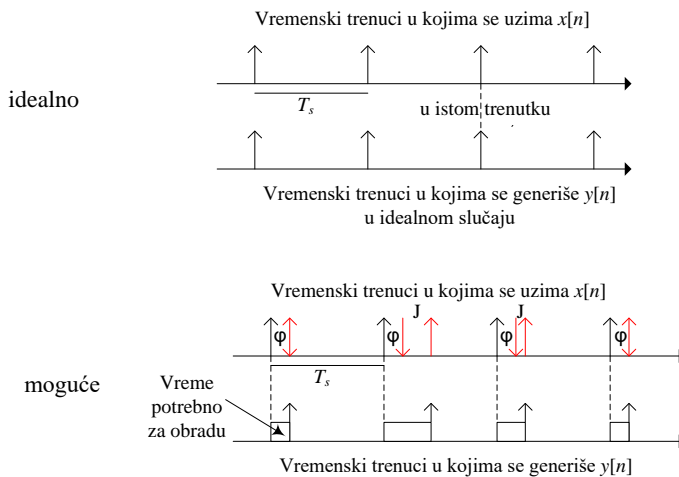
Okruženje – fizički svet iz kojeg je potrebno dobiti informacije a po potrebi i delovati na njega.

Obrada – naš digitalni sistem



3

Da se podsetimo - Rad u realnom vremenu.



Jitter – podrhtavanje
„veštački“ uneti fazni stav



4

Kontinualan signal
Sistem

Diferencijalne jednačine
Furijerova transformacija
Laplasova transformacija

Vremenski domen:

Signal + „diferencijalne jednačine“ = odziv sistema
konvolucija (impulsni odziv, signal) = odziv sistema

Transformacioni “frekventni” domen:

Signal prikazan u “frekventnom” domenu
Impulsni odziv sistema u “frekventnom” domenu
 proizvod
Odziv sistema u “frekventnom” domenu

Filtar - sistem koji “izvodi” diferencijalne jednačine!



Diskretan signal
Sistem

Diferencne jednačine
Furijerova transformacija
Z transformacija

Vremenski domen:

Signal + „diferencne jednačine“ = odziv sistema
konvolucija (impulsni odziv, signal) = odziv sistema

Transformacioni “frekventni” domen:

Signal prikazan u “frekventnom” domenu
Impulsni odziv sistema u “frekventnom” domenu
 proizvod
Odziv sistema u “frekventnom” domenu

Filtar - sistem koji “izvodi” diferencne jednačine!



Diferencna jednačina

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k]$$

Transformacioni domen

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

$$a_k \neq 0 \Rightarrow \text{IIR}$$

IIR – Infinite Impulse Response – Beskonačan impulsni odziv



Postupak projektovanja i realizacije nekog diskretnog sistema sastoji se iz četiri faze:

1. U fazi zadavanja specifikacija se na osnovu analize problema zadaju amplitudska i/ili fazna karakteristika diskretnog sistema koje treba ostvariti, kao i dozvoljene tolerancije u realizaciji ovih karakteristika.
2. U fazi sinteze se određuju koeficijenti polinoma u brojiocu i imeniocu funkcije prenosa date izrazom, ili položaji polova i nula funkcije prenosa, na takav način da se zadate specifikacije ostvare sa greškom koja leži unutar dozvoljenih tolerancija.
3. U fazi realizacije vrši se izbor realizacione strukture i određivanje koeficijenata množača. Pored kriterijuma ekonomičnosti, prilikom izbora se vodi računa i o osetljivosti realizacije na konačnu tačnost predstavljanja podataka u digitalnim sistemima.
4. U fazi implementacije vrši se softverska ili hardverska realizacija funkcije prenosa određene u fazi 2, korišćenjem realizacione strukture izabrane u fazi 3.



Šta je cilj?

Napraviti sistem koji vrši obradu ulaznog signala i na svom izlazu daje odgovarajući odziv

Diskretan sistem

Realizacija -> Digitalno

Softverski – „opštenamenski sistem (procesor)“ + program

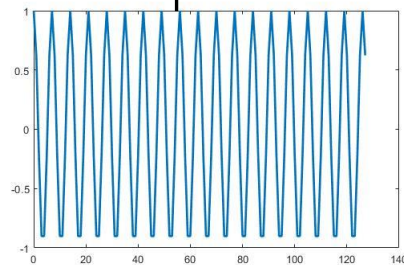
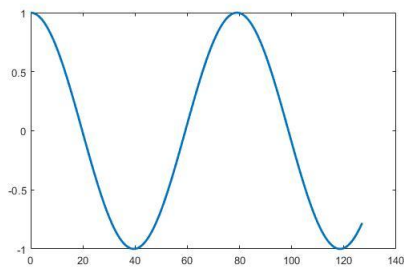
Hardverski – sva potrebna računanja i memorije namenski prilagođeni sistemu

Vodimo računa o:

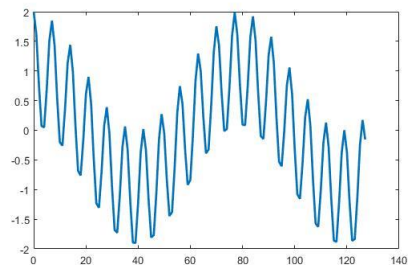
1. računarskoj efikasnosti – brzina, manje potrebnog hardvera, cena ...
 2. memorijski zahtevi – manje memorije, brzina, cena ...
 3. uticaj konačne dužine reči – AD i DA konverzija, računanje, memorija ...
- ...



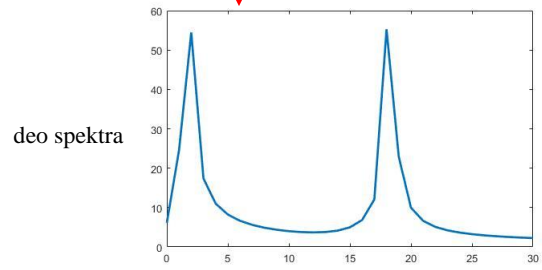
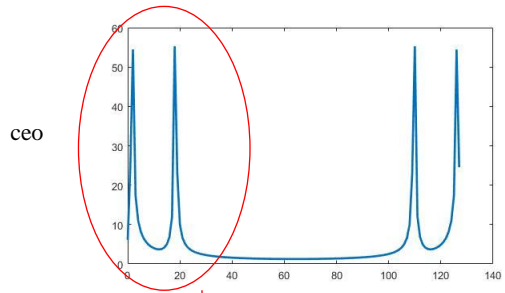
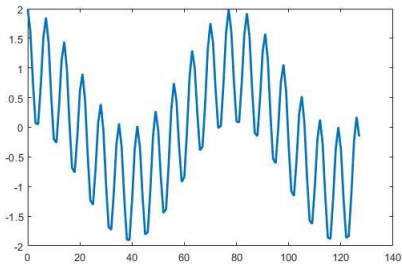
Zašto filtriranje a ne uklanjanje harmonijskih komponenti u spektru?



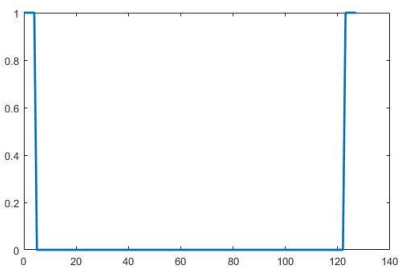
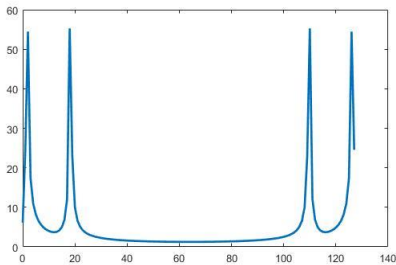
=



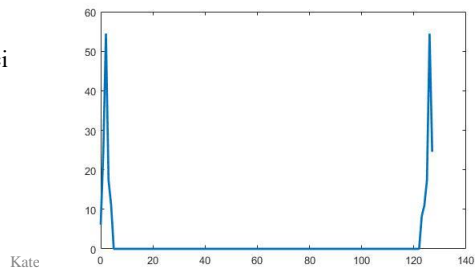
Spektar
nije koherentno odabiranje - ima curenja

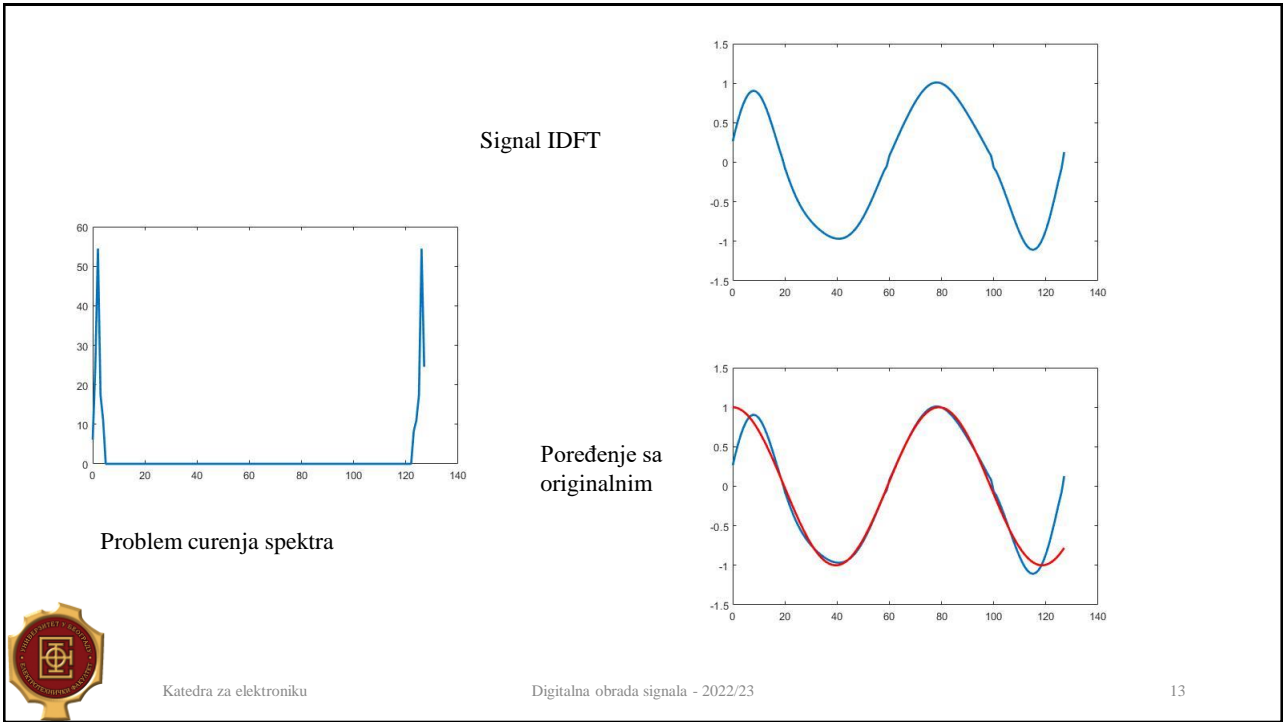


Prozorska funkcija
za spektar

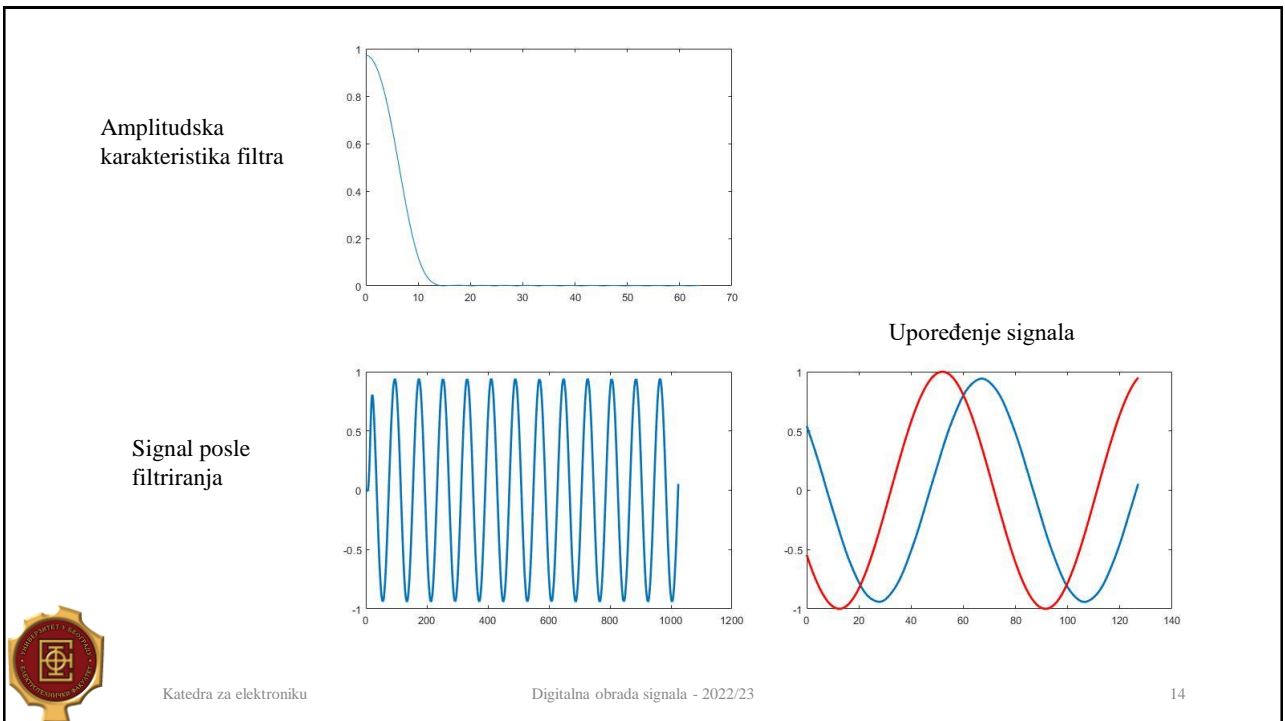


Rezultujući
spektar





13



14

Karakteristike funkcije prenosa koju treba sintetizovati, ili kraće, specifikacije, zadaju se najčešće u frekvencijskom domenu.

Kod selektivnih funkcija prenosa, koje su poznate pod nazivom filtarske funkcije, razlikuju se

- propusni opseg
- nepropusni opseg
- prelazna zona.

U propusnom opsegu signal se u sistemu pojačava, propušta neizmenjen ili vrlo malo slabi.

U nepropusnom opsegu se signal znatno oslabljuje.

U prelaznoj zoni funkcija prenosa se ne specificira, ali se najčešće zahteva da amplitudska karakteristika bude monotono opadajuća.

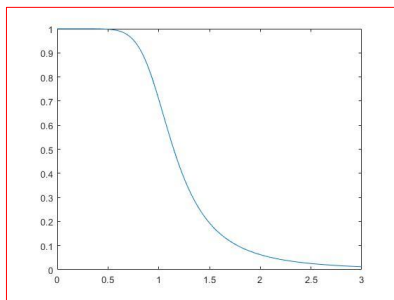
Broj propusnih opsega, odnosno nepropusnih opsega može biti i veći od jedan.

Za sada ! Sve posle može da se generalizuje.

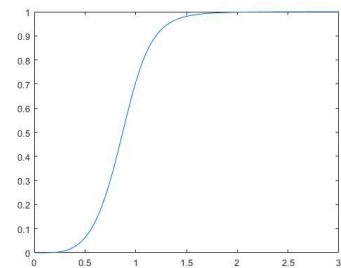


Primer amplitudskih karakteristika koje želimo da dobijemo

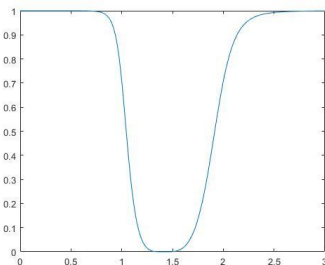
Propusnik niskih
učestanosti
NF



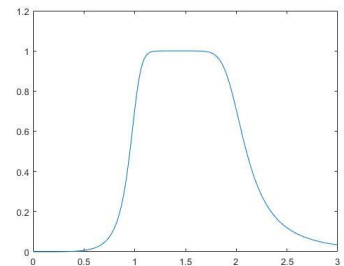
Propusnik visokih
učestanosti
VF



Nepropusnik
opsega učestanosti
NO



Propusnik opsega
učestanosti
PO



Zašto niskofrekventni filtri (NF) koji propuštaju samo niske učestanosti kada nama možda (sigurno) trebaju i

Visokofrekventni filtri (VF), odnosno propusnici visokih učestanosti
Propusnici opsega učestanosti (PO)
Nepropusnici opsega učestanosti (NO)

U slučaju sinteze NF filtra, mogu se dobiti eksplicitne formule za polove i nule funkcije prenosa.

Sinteza ostalih tipičnih funkcija prenosa (VF, PO, NO) vrši se najčešće transformacijom NF funkcije prenosa

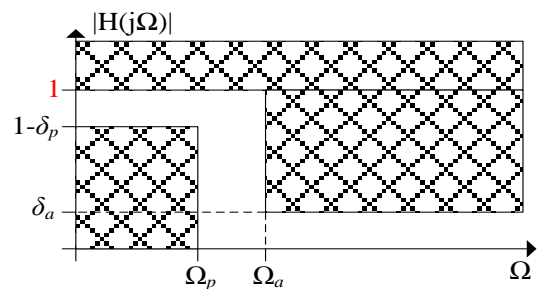
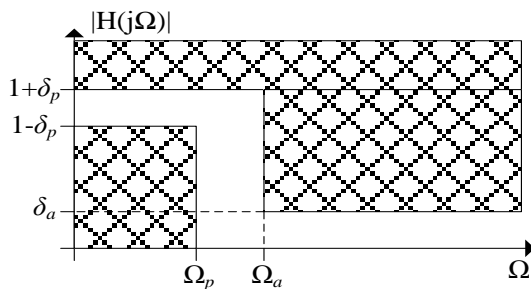


NF - krećemo od:

1. Granične učestanosti propusnog opsega Ω_p (ω_p)
2. Granične učestanosti nepropusnog opsega Ω_a (ω_a)
3. Varijacija amplitude u propusnom opsegu δ_p
4. Varijacija amplitude u nepropusnom opsegu δ_a

Grafički

Šrafirano = ne sme



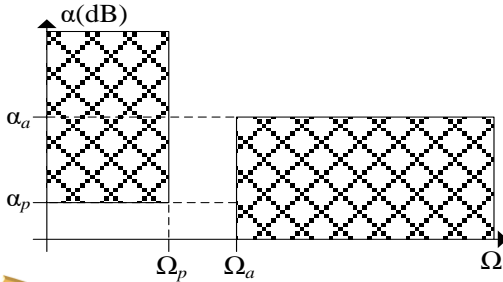
Ako pojačanje ne sme da bude veće od 1



Najčešći način zadavanja gabarita filtarskih funkcija je preko **recipročne vrednosti amplitudske karakteristike izražena u dB**, odnosno zadaje se **slabljenje**.

U tom slučaju se umesto varijacije amplitude u propusnom opsegu δ_p specificira **maksimalno slabljenje u propusnom opsegu α_p** , dok se umesto varijacije amplitude u nepropusnom opsegu δ_a specificira **minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu α_a** .

Prilikom projektovanja učestanosti su najčešće normalizovane! $\Omega_p = 1$



$$H \text{ može } > 1 \quad \alpha_p = 20 \log \frac{1 + \delta_p}{1 - \delta_p}, \quad \delta_p = \frac{10^{0.05\alpha_p} - 1}{10^{0.05\alpha_p} + 1}$$

$$H \text{ mora } \leq 1 \quad \alpha_p = 20 \log \frac{1}{1 - \delta_p}, \quad \delta_p = 1 - 10^{-0.05\alpha_p}$$

$$\alpha_a = -20 \log \delta_a, \quad \delta_a = 10^{-0.05\alpha_a}$$



Projektovanje analognih filtara



Otkud sada analogni filtri kada nama trebaju digitalni?

Najčešće se sinteza **digitalnog filtra** izvodi pogodnom **transformacijom** funkcije prenosa odgovarajućeg **analognog filtra**.

1. Postupak sinteze analognih filtara (naročito propusnika niskih učestanosti) se proučava već više desetina godina (praktično od kako postoji elektronika) tako da postoje razvijeni postupci sinteze za mnoge važne praktične slučajeve.
2. U mnogim važnim slučajevima polovi ili koeficijenti funkcije prenosa analognih filtara dati su eksplicitnim formulama.
3. Za slučajeve za koje ne postoje eksplicitne formule za funkciju prenosa sačinjene su opsežne tabele koje služe kao pomoć pri projektovanju.

Transformacije analogni u digitalni filter su relativno jednostavne i u velikoj meri zadržavaju svojstva analognih filtara.



Batervortova aproksimacija idealne amplitudske karakteristike (Butterworth)

Amplitudska karakteristika NF filtra je izvedena pod pretpostavkom da je **maksimalno ravna u koordinatnom početku**.

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2N}}$$

ε parametar koji određuje slabljenje na granici propusnog opsega $\omega = \omega_p$

Digresija: 10 umesto 20 pošto je kvadrat karakteristike $\alpha_p = 10 \log \left(1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\omega_p}{\omega_p}\right)^{2N} \right) = 10 \log(1 + \varepsilon^2)$ $\varepsilon = \sqrt{10^{0.1\alpha_p} - 1}$

$$\alpha_a = 10 \log \left(1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\omega_a}{\omega_p}\right)^{2N} \right)$$

$$N \geq \frac{\log \left(\frac{10^{0.1\alpha_a} - 1}{10^{0.1\alpha_p} - 1} \right)}{2 \log \left(\frac{\omega_a}{\omega_p} \right)} = \frac{\log D}{2 \log \left(\frac{1}{k} \right)}$$

D – faktor diskriminacije

k – faktor selektivnosti



Određivanje polova

$$|H(j\omega)|^2 = H(s) \cdot H(-s) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2N}} \quad (s = j\omega)$$

$$1 + \varepsilon^2 \left(\frac{s_k}{\omega_p}\right)^{2N} = 0 \Rightarrow s_k = \sqrt[2N]{\frac{\omega_p^{2N}}{\varepsilon^2}} (-1)$$

$$s_k = \frac{\omega_p}{\sqrt[2N]{\varepsilon}} e^{j\pi \frac{2k+N-1}{2N}} = \frac{\omega_p}{\sqrt[2N]{\varepsilon}} \left(\cos\left(\pi \frac{2k+N-1}{2N}\right) + j \sin\left(\pi \frac{2k+N-1}{2N}\right) \right) \quad k = 1, 2, \dots, 2N$$

$$s_k = \frac{1}{\sqrt[2N]{\varepsilon}} \left(\cos\left(\pi \frac{2k+N-1}{2N}\right) + j \sin\left(\pi \frac{2k+N-1}{2N}\right) \right) \quad k = 1, 2, \dots, 2N \quad \text{Skalirani } \omega_p = 1$$

Zbog uslova stabilnosti, koji zahteva da svi polovi funkcije prenosa leže u levoj polovini ravni kompleksne učestanosti s , polovi funkcije $H(s)$ su koreni iz leve poluravni ($1 \leq k \leq N$), dok su polovi funkcije $H(-s)$ koreni iz desne poluravni ($N+1 \leq k \leq 2N$).

$$H(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^N (s - s_k)} \quad H_0 = \prod_{k=1}^N (-s_k)$$



Digresije

$$H(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^N (s - s_k)}$$

$$H(s=0) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^N (-s_k)} = 1 \Rightarrow H_0 = \prod_{k=1}^N (-s_k)$$

U slučaju normalizovanog Batervortovog filtra
 $\omega_p = 1 \Rightarrow H_0 = 1$

$$\alpha_a \leq 10 \log \left(1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\omega_a}{\omega_p}\right)^{2N} \right)$$

$$1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\omega_a}{\omega_p}\right)^{2N} \geq 10^{0.1\alpha_a}$$

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\omega_a}{\omega_p}\right)^{2N} \geq 10^{0.1\alpha_a} - 1$$

$$\log \left(\varepsilon^2 \left(\frac{\omega_a}{\omega_p}\right)^{2N} \right) \geq \log(10^{0.1\alpha_a} - 1)$$

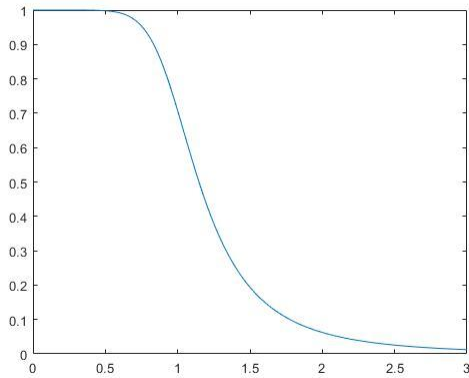
$$\log(\varepsilon^2) + \log \left(\frac{\omega_a}{\omega_p}\right)^{2N} \geq \log(10^{0.1\alpha_a} - 1)$$

$$2N \log \left(\frac{\omega_a}{\omega_p}\right) \geq \log(10^{0.1\alpha_a} - 1) - \log(\varepsilon^2)$$

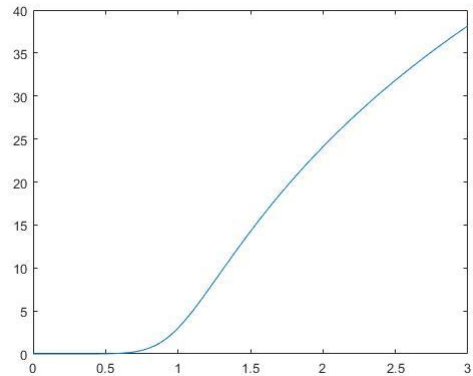
$$N \geq \frac{\log \left(\frac{10^{0.1\alpha_a} - 1}{10^{0.1\alpha_p} - 1} \right)}{2 \log \left(\frac{\omega_a}{\omega_p}\right)}$$



$$N=4, \varepsilon = 1, \omega_p = 1$$



Slabljenje u dB



Napomena: uobičajeno je učestanost prikazana u logaritmskoj razmeri. Međutim zbog upoređenja različitih a istih NF filtara ostajemo pri linearnoj razmeri.

$$|H(j1)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow |H(j1)| = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707 \approx -3\text{dB}$$



Čebiševljeva aproksimacija prve vrste (Chebyshev)

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)}$$

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1}(x)) & |x| < 1 \\ \cosh(N \cosh^{-1}(x)) & |x| > 1 \end{cases}$$

$$\text{Kako je } T_N\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right) = T_N(1) = 1$$

Čebiševljevi polinomi prve vrste

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

...

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

$$N \geq \frac{\cosh^{-1}\sqrt{D}}{\cosh^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)}$$

$$\text{Uočiti } T_n(1) = 1$$

$$D = \frac{10^{0.1\alpha_a} - 1}{10^{0.1\alpha_p} - 1}$$

Faktor diskriminacije

$$k = \frac{\omega_p}{\omega_a}$$

Faktor selektivnosti

Isto kao kod Batervortove aproksimacije



Polovi $s_k = \sigma_k + j\omega_k$

$$\sigma_k = \sinh\left(\frac{1}{N} \sinh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) \sin\left(\pi \frac{2k + N - 1}{2N}\right)$$

$$\omega_k = \cosh\left(\frac{1}{N} \sinh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) \cos\left(\pi \frac{2k + N - 1}{2N}\right)$$

Normalizovani $\omega_p = 1$

Funkcija prenosa $H(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^N (s - s_k)}$

$$H_0 = \begin{cases} 10^{-0.05\alpha_p} \prod_{k=1}^N (-s_k) & N \text{ parno} \\ \prod_{k=1}^N (-s_k) & N \text{ neparno} \end{cases}$$



Digresija: deluje zbnjujuće

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

...

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

$$T_1(0) = 1$$

$$T_1(0) = 0$$

$$T_2(0) = 2 \cdot 0 \cdot T_1(0) - T_0(0) = -1$$

$$T_3(0) = 2 \cdot 0 \cdot T_2(0) - T_1(0) = 0$$

$$T_4(0) = 2 \cdot 0 \cdot T_3(0) - T_2(0) = 1$$

$$T_5(0) = 2 \cdot 0 \cdot T_4(0) - T_3(0) = 0$$

...

$$H_0 = \begin{cases} 10^{-0.05\alpha_p} \prod_{k=1}^N (-s_k) & N \text{ parno} \\ \prod_{k=1}^N (-s_k) & N \text{ neparno} \end{cases}$$

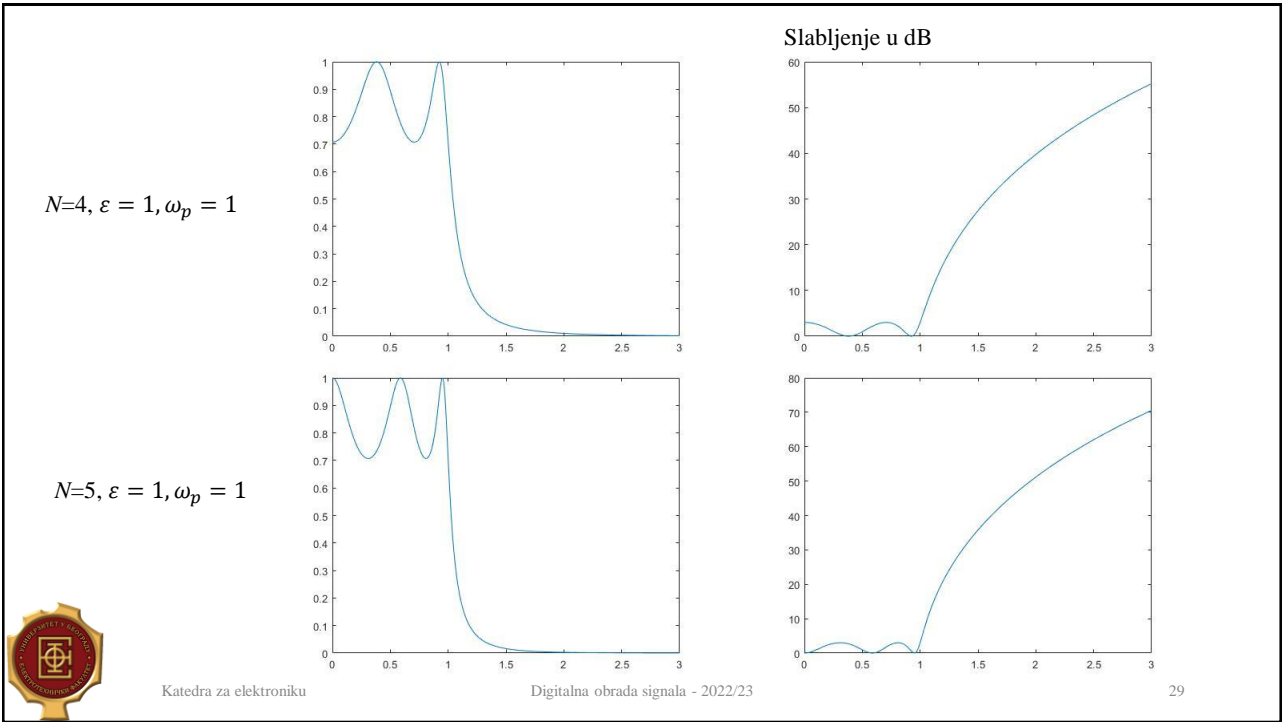
$$|H(j0)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{0}{\omega_p}\right)} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(0)} = \frac{H_0^2}{(\prod_{k=1}^N (-s_k))^2}$$

$$|H(j0)|^2 = \begin{cases} 1 & N \text{ neparno} \\ \frac{1}{1 + \varepsilon^2} & N \text{ parno} \end{cases}$$

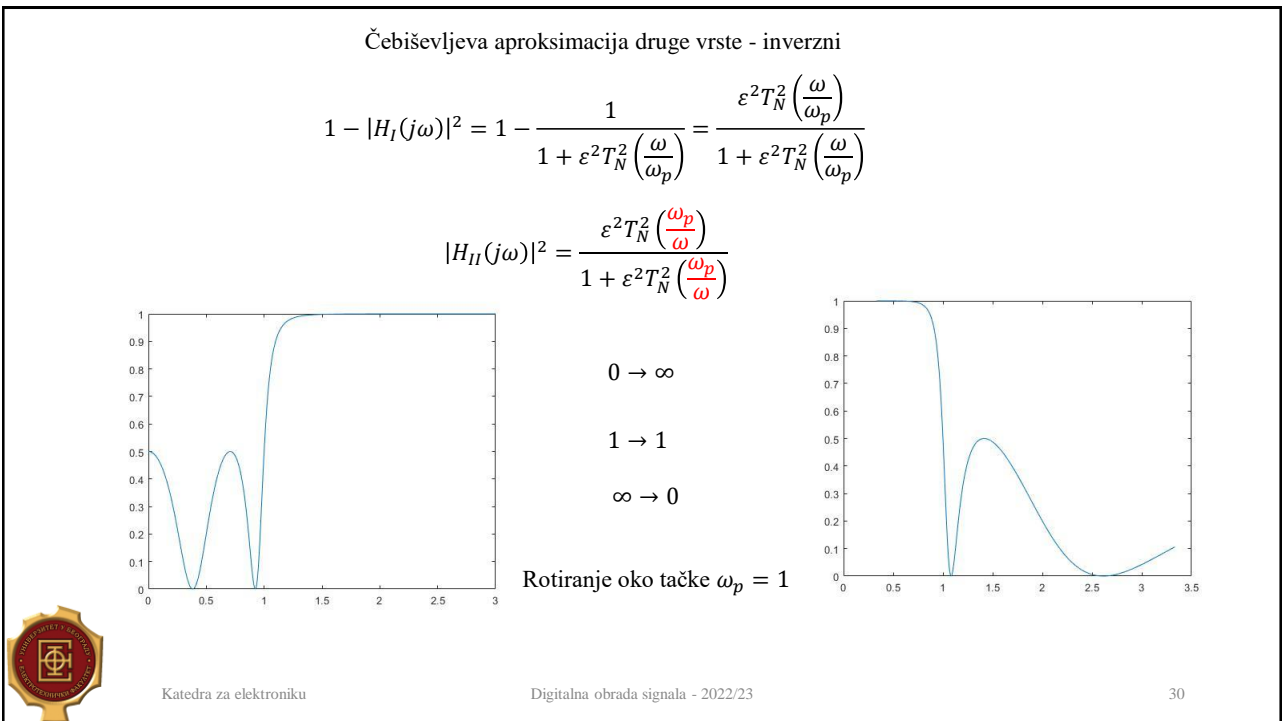
Da bi za N parno imali u propusnom opsegu maksimalno pojačanje 1 onda je sa faktorom $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = 10^{-0.05\alpha_p}$ pomnožen $|H(j0)|^2$

Vidi se na narednim slikama





29



30

Normalizovano $\omega_p = 1$

Nule $(z_k)_{II} = \frac{1}{\cos\left(\pi \frac{2i-1}{2N}\right)} \quad i = 1, 2, \dots, r$

Polovi $(s_k)_{II} = \frac{1}{(s_k)_I}$

$$r = \begin{cases} \frac{N-1}{2} & N \text{ neparno} \\ \frac{N}{2} & N \text{ parno} \end{cases}$$

Funkcija prenosa

$$H(s) = H_0 \frac{\prod_{k=1}^r (s^2 + z_k^2)}{\prod_{k=1}^r (s - s_k)} \quad H_0 = \frac{\prod_{k=1}^N (-s_k)}{\prod_{k=1}^r (z_k^2)}$$



Na šta treba obratiti pažnju

$$|H_{II}(j\omega_p)|^2 = \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}$$

$$|H_{II}(j\omega_a)|^2 = \frac{\varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{\omega_p}{\omega_a}\right)}{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{\omega_p}{\omega_a}\right)}$$

Potreban red filtra $N \geq \frac{\cosh^{-1} \sqrt{D}}{\cosh^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)} \quad D = \frac{10^{0.1\alpha_a} - 1}{10^{0.1\alpha_p} - 1} \quad k = \frac{\omega_p}{\omega_a}$

Prethodne slike su crtane sa fiksnim N, ε pa kako ispadnu ω_a odnosno α_a

Kako se ripl javlja u nepropusnom opsegu ovde se češće kreće od ω_a i α_a

Da bi dobili slična poređenja, ranije

$$N = 4, \varepsilon = 1, \omega_p = 1 \Rightarrow \alpha_p = 3\text{dB} \quad (1 - \delta_p = \frac{\sqrt{2}}{2})$$

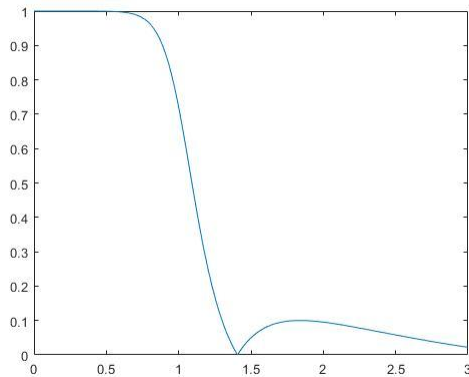
Ako uzmemo $\omega_a = 1.3 \Rightarrow \alpha_a \approx 20\text{dB} \quad (\delta_a = 0.1)$

Vidi se na slikama.

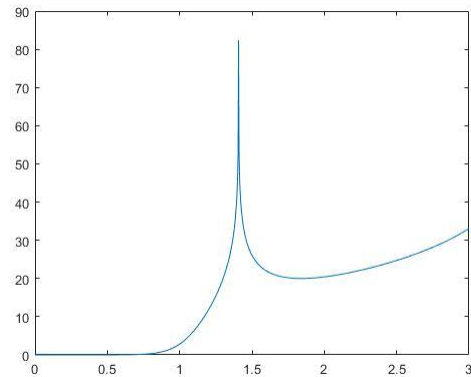


Sa istim parametrima

$$N = 4, \alpha_p = 3\text{dB} \quad \left(1 - \delta_p = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$\omega_a = 1.3, \alpha_a \approx 20\text{dB} \quad (\delta_a = 0.1)$$
$$\Rightarrow \omega_p \approx 1$$



Slabljenje u dB



Eliptička aproksimacija

Zajednička karakteristika Batervortove i Čebiševljeve aproksimacije je da su **odlične u nepropusnom opsegu**, ali po cenu

široke prelazne zone.

Inverzni Čebiševljevi filtri imaju manje slabljenje u nepropusnom opsegu ali je slabljenje u gornjem delu propusnog opsega često suviše veliko.

Najbolja prelazna zona se dobija ako se greška aproksimacije idealne karakteristike ravnomerno raspoređi u propusnom i nepropusnom opsegu. Rezultujuća amplitudska karakteristika

ima oscilatorni karakter i u propusnom i u nepropusnom opsegu.

Takva aproksimacija naziva se

eliptička aproksimacija

jer se u postupku sinteze koriste eliptičke funkcije, ili

Kauerova aproksimacija (Cauer)



$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)}$$

$C_N(x)$ - Čebiševljeva racionalna funkcija

$$C_N(x) = Kx \frac{(x^2 - z_1^2)(x^2 - z_2^2) \dots (x^2 - z_L^2)}{(x^2 - p_1^2)(x^2 - p_2^2) \dots (x^2 - p_L^2)}$$

Red filtra

$$N \geq \frac{\log 16D}{\log(1/q)}$$

$$q = q_0 + 2q_0^5 + 15q_0^9 + 150q_0^{13}$$

$$q_0 = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}$$

$$k' = \sqrt{1 - k^2}$$

$$k = \frac{\omega_p}{\omega_a}$$



$$H_E(s) = \frac{H_0}{D_0(s)} \prod_{i=1}^r \frac{s^2 + A_{0i}}{s^2 + B_{1i}s + B_{0i}}$$

$$D_0(s) = \begin{cases} s + \sigma_0 & N \text{ neparno} \\ 1 & N \text{ parno} \end{cases}$$

$$r = \begin{cases} \frac{N-1}{2} & N \text{ neparno} \\ \frac{N}{2} & N \text{ parno} \end{cases}$$

$$\sigma_0 = \left| \frac{2q^{1/4} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{m(m+1)} \sinh[(2m+1)\Lambda]}{1 + 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cosh 2m\Lambda} \right|$$

$$\Lambda = \frac{1}{2N} \ln \frac{10^{0.05\alpha_p} + 1}{10^{0.05\alpha_p} - 1}$$



$$B_{0i} = \frac{(\sigma_0 V_i)^2 + (\omega_i W)^2}{(1 + \sigma_0^2 \omega_i^2)^2}$$

$$B_{1i} = \frac{2\sigma_0 V_i}{1 + \sigma_0^2 \omega_i^2}$$

$$A_{0i} = \frac{1}{\omega_i^2}$$

$$W = \sqrt{(1 + k\sigma_0^2) \left(1 + \frac{\sigma_0^2}{k}\right)}$$

$$V_i = \sqrt{(1 - k\omega_i^2) \left(1 - \frac{\omega_i^2}{k}\right)}$$

$$\omega_i = \frac{2q^{1/4} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{m(m+1)} \sin \frac{(2m+1)\pi\mu}{N}}{1 + 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q \cos \frac{2m\pi\mu}{N}}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$\mu = \begin{cases} i & N \text{ neparno} \\ i - \frac{1}{2} & N \text{ parno} \end{cases}$$

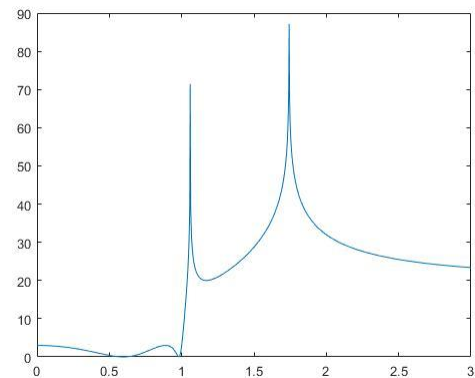
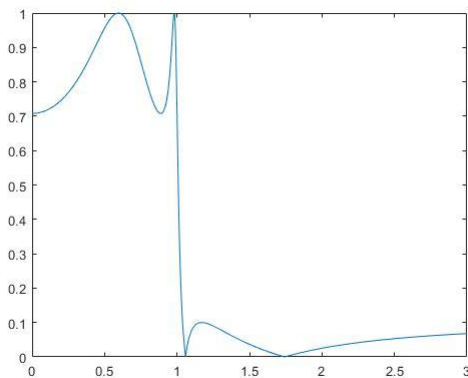
$$H_0 = \begin{cases} \sigma_0 \prod_{i=1}^r \frac{B_{0i}}{A_{0i}} & N \text{ neparno} \\ 10^{-0.05\alpha_p} \prod_{i=1}^r \frac{B_{0i}}{A_{0i}} & N \text{ parno} \end{cases}$$

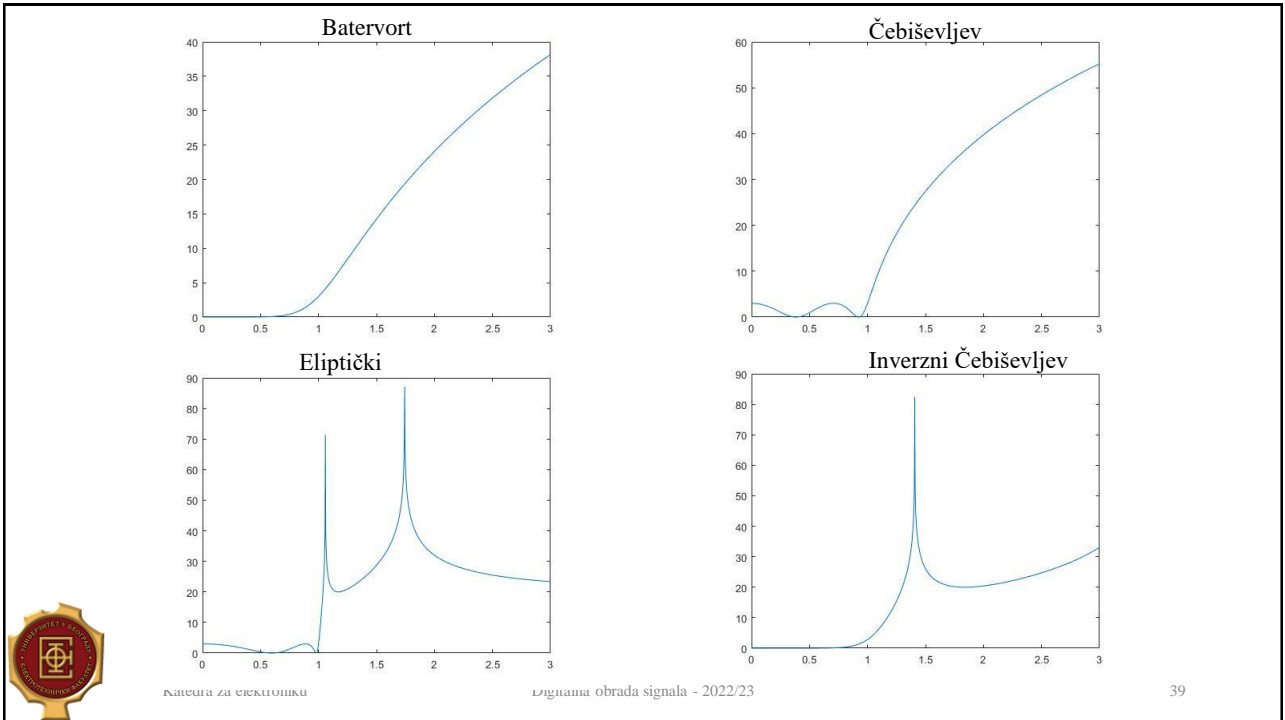


$$N = 4, \omega_p = 1, \alpha_p = 3\text{dB} \quad (1 - \delta_p = \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\alpha_a \approx 20\text{dB} \quad (\delta_a = 0.1)$$

ω_a kako ispadne





Koji filter je najbolji?

1. U donjem delu propusnog opsega (u okolini $\omega = 0$) najbolji je inverzni Čebiševljev filter, a za njim sledi Batervortova aproksimacija. Čebiševljev i eliptički filter imaju približno slične karakteristike.
2. U gornjem delu propusnog opsega najbolji su eliptički i Čebiševljev filter dok su inverzni Čebiševljev i Batervortov filter znatno lošiji jer unose veće slabljenje.
3. U prelaznoj zoni, prema kriterijumu širine prelazne zone, najbolji je eliptički filter, za njim sledi inverzni Čebiševljev filter, onda Čebiševljev, i na kraju, Batervortov filter.
4. U nepropusnom opsegu Čebiševljev i Batervortov filter obezbeđuju veće slabljenje od inverznog Čebiševljevog ili eliptičkog filtra. Međutim, ova činjenica ne predstavlja nikakvu prednost ove dve aproksimacije jer je kod svih aproksimacija zadovoljen uslov da je u nepropusnom opsegu slabljenje veće od minimalne vrednosti α_a

Logo of the Faculty of Electrical Engineering, University of Zagreb, is visible in the bottom left corner of the slide area.

Vrlo važnu karakteristiku funkcije prenosa predstavlja *Q faktor kritičnog para polova*

Kritičnim parom polova podrazumeva se onaj koji je najbliži imaginarnoj osi.

Ova karakteristika je važna zbog toga što su za realizaciju većeg *Q faktora potrebne kvalitetnije* komponente (sa manjim gubicima u pasivnoj tehnologiji i manjim tolerancijama u aktivnoj tehnologiji).

U slučaju digitalnih filtara, veći *Q faktor zahteva veći broj bita u digitalnoj reči*.

U pogledu Q faktora, najbolji je Batervortov filter, obe vrste Čebiševljevih filtara su identične, dok je eliptički filter najgori.

$$Q_k = -\frac{\sqrt{\sigma_k^2 + \omega_k^2}}{2\sigma_k}$$



Što se tiče jednostavnosti realizacije, u svim tehnologijama je jednostavnije realizovati polinomske filtre (čija funkcija prenosa nema nule) kakvi su Batervortov i Čebiševljev, jer je potreban manji broj elemenata u analognim realizacijama ili manji broj množača u digitalnoj realizaciji.

Druga vrsta poređenja različitih metoda aproksimacije amplitudske karakteristike može se izvesti tako što se određuje **minimalni red funkcije koja zadovoljava traženi gabarit**.

Neka je potrebno odrediti funkciju prenosa koja zadovoljava karakteristike:

$$\Omega_p = 1, \Omega_a = 1.5, \alpha_p = 0.5 \text{ dB}, \alpha_a = 50 \text{ dB}.$$

Red funkcije prenosa koja zadovoljava tražene zahteve mora biti

Batervort $N = 17$

Čebiševljev $N = 8$

Inverzni Čebiševljev $N = 8$

Eliptički $N = 5$

Eliptička aproksimacija daje rešenje najnižeg reda, koje je najčešće i najekonomičnije za realizaciju.

Loša fazna karakteristika?

U pogledu odstupanja od linearnosti fazne karakteristike, odnosno odstupanja karakteristike grupnog kašnjenja od konstante, najbolji je Batervortov filter, za njim sledi inverzni Čebiševljev filter, dok Čebiševljev i eliptički filter imaju znatno lošije karakteristike naročito u gornjem delu propusnog opsega??? (Baš tamo gde treba)



Zašto je bitna “linearna” faza odnosno fazno kašnjenje i grupno kašnjenje

Neka je na ulazu u sistem signal
$$\tau_p = -\frac{\varphi(\omega)}{\omega} \quad \tau_g = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$$

$$s(t) = \sin(\omega_0 t + \varphi_1) + \sin(2\omega_0 t + \varphi_2)$$

Njegov vremenski oblik

$$s(t) = \sin(\omega_0 t + \varphi_1) + \sin(2\omega_0 t + \varphi_2) = 2 \cos\left(\frac{\omega_0 t + \varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \sin\left(\frac{3\omega_0 t + \varphi_2 + \varphi_1}{2}\right)$$

Ako signal prolazi kroz sistem koji ima konstantno pojačanje ali unosi različite fazne stavove na različitim učestanostima

$$s^*(t) = \sin(\omega_0 t + \varphi_1 + \Delta\varphi_1) + \sin(2\omega_0 t + \varphi_2 + \Delta\varphi_2)$$

Njegov vremenski oblik

$$\begin{aligned} s^*(t) &= \sin(\omega_0 t + \varphi_1 + \Delta\varphi_1) + \sin(2\omega_0 t + \varphi_2 + \Delta\varphi_2) = \\ &= 2 \cos\left(\frac{\omega_0 t + \varphi_2 - \varphi_1 + \Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1}{2}\right) \sin\left(\frac{3\omega_0 t + \varphi_2 + \varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \Delta\varphi_1}{2}\right) \end{aligned}$$



$$s(t) = 2 \cos\left(\frac{\omega_0 t + \varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \sin\left(\frac{3\omega_0 t + \varphi_2 + \varphi_1}{2}\right)$$

$$s^*(t) = 2 \cos\left(\frac{\omega_0 t + \varphi_2 - \varphi_1 + \Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1}{2}\right) \sin\left(\frac{3\omega_0 t + \varphi_2 + \varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \Delta\varphi_1}{2}\right)$$

Izlazni signal je “zakašnjen” ali da bi se zadržao oblik $s^*(t + \Delta t) = s(t)$

$$\omega_0 \Delta t + \Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1 = 0$$

$$3\omega_0 \Delta t + \Delta\varphi_2 + \Delta\varphi_1 = 0$$

$$\Delta\varphi_2 = -2\omega_0 \Delta t$$

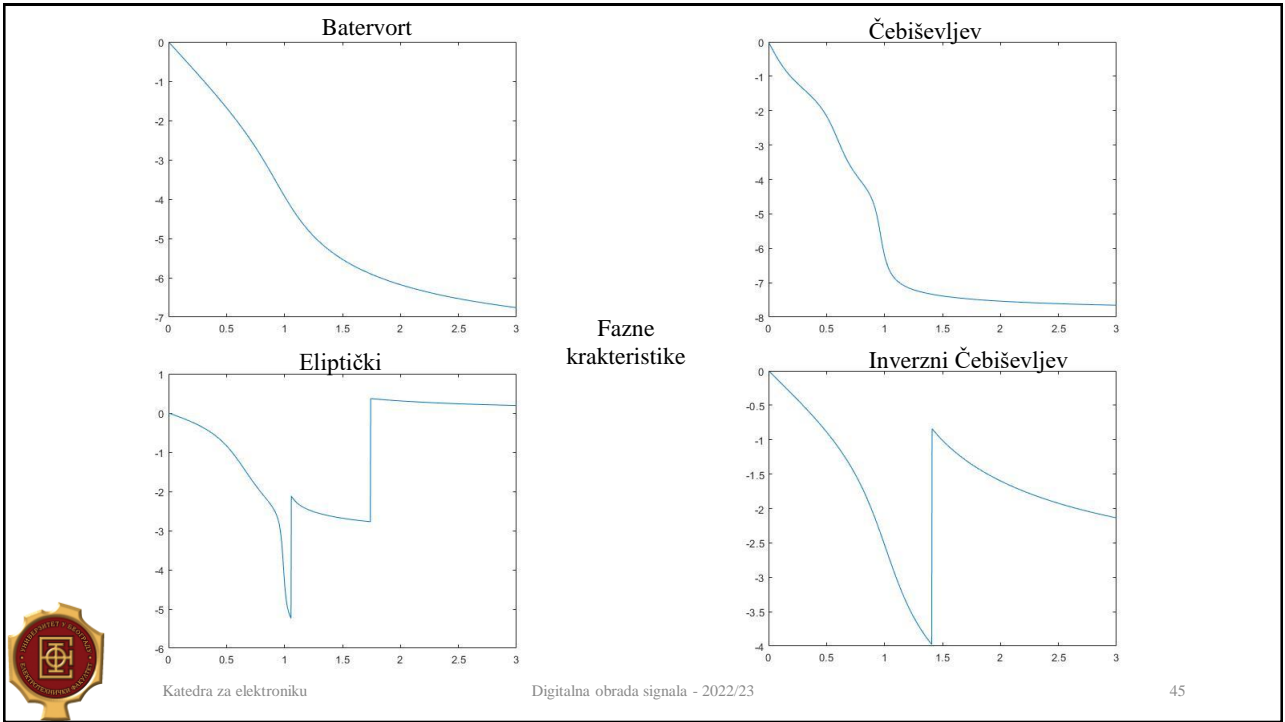
Fazna linerano zavisi od učestanosti

$$\Delta\varphi_1 = -\omega_0 \Delta t$$

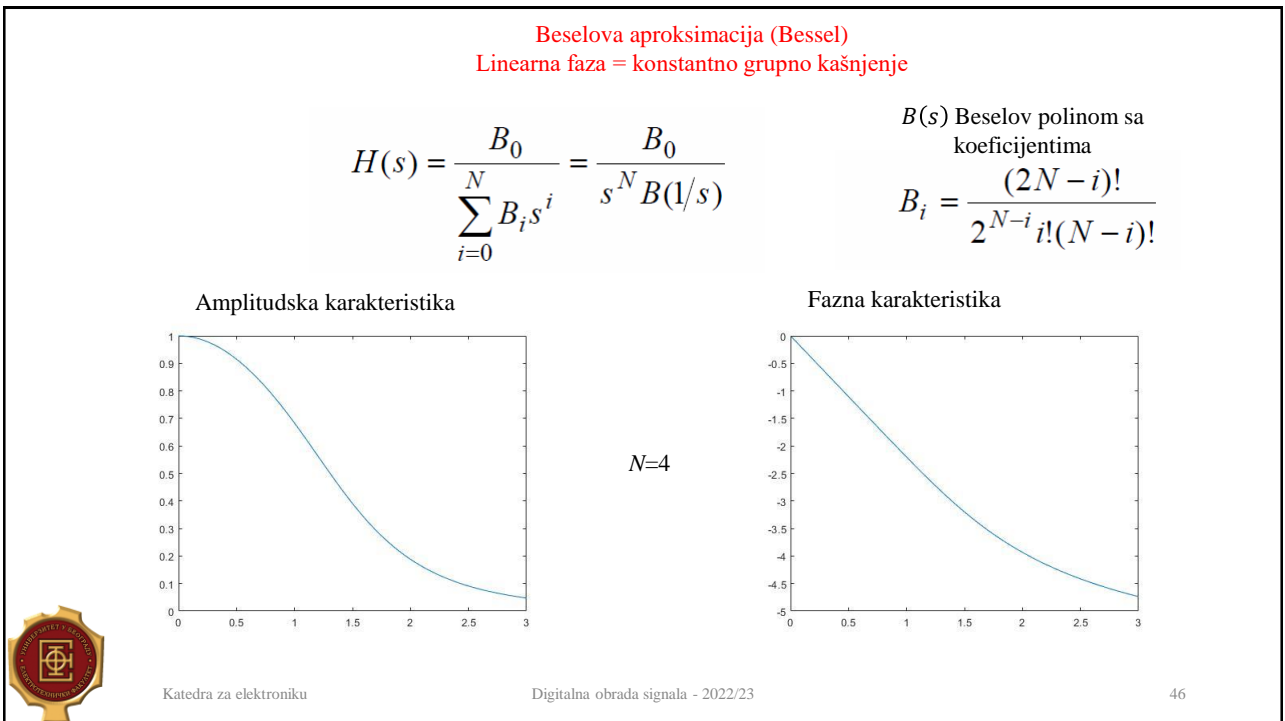
Fazno kašnjenje konstantno

Grupno kašnjenje konstantno





45



46

Isprojektovali NF normalizovan filter i šta sada?

Transformacije filtera

Transformacije učestanosti



NF \rightarrow NF

$s = a\hat{s}$

smena

$$s = f(\hat{s})$$

s pre transformacije; ono što figuriše u funkcijama prenosa izračunato za $\omega_p = 1$

\hat{s} posle transformacije

$$H(s) = H_0 \frac{\prod_{i=0}^M (s - z_i)}{\prod_{i=0}^N (s - p_i)} = H_0 \frac{(\prod_{i=0}^M z_i) \left(\prod_{i=0}^M \left(\frac{s}{z_i} - 1 \right) \right)}{(\prod_{i=0}^N p_i) \left(\prod_{i=0}^N \left(\frac{s}{p_i} - 1 \right) \right)}$$

$$\downarrow s = a\hat{s}$$

$$H(\hat{s}) = H_0 \frac{\prod_{i=0}^M (a\hat{s} - z_i)}{\prod_{i=0}^N (a\hat{s} - p_i)} = H_0 \frac{(\prod_{i=0}^M a) \left(\prod_{i=0}^M \left(\hat{s} - \frac{z_i}{a} \right) \right)}{(\prod_{i=0}^N a) \left(\prod_{i=0}^N \left(\hat{s} - \frac{p_i}{a} \right) \right)} = H_0 \frac{(\prod_{i=0}^M z_i) \left(\prod_{i=0}^M \left(\frac{\hat{s}}{z_i/a} - 1 \right) \right)}{(\prod_{i=0}^N p_i) \left(\prod_{i=0}^N \left(\frac{\hat{s}}{p_i/a} - 1 \right) \right)}$$

$$\hat{\omega}_p = \frac{\omega_p}{a} \Rightarrow \hat{\omega}_a = \frac{\omega_a}{a} \Rightarrow \hat{\omega}_a - \hat{\omega}_p = \frac{\omega_a - \omega_p}{a}$$

$$\text{Obrnuto da bi } \omega_p = 1 \quad a = \frac{\omega_p}{\hat{\omega}_p} \Rightarrow \omega_a = a\hat{\omega}_a \Rightarrow \omega_a - \omega_p = a(\hat{\omega}_a - \hat{\omega}_p)$$



NF -> VF $s = \frac{a}{\hat{s}}$

$$\begin{aligned}
 H(s) &= H_0 \frac{\prod_{i=0}^M (s - z_i)}{\prod_{i=0}^N (s - p_i)} = H_0 \frac{(\prod_{i=0}^M z_i) \left(\prod_{i=0}^M \left(\frac{s}{z_i} - 1\right)\right)}{(\prod_{i=0}^N p_i) \left(\prod_{i=0}^N \left(\frac{s}{p_i} - 1\right)\right)} \\
 H(\hat{s}) &= H_0 \frac{\prod_{i=0}^M \left(\frac{a}{\hat{s}} - z_i\right)}{\prod_{i=0}^N \left(\frac{a}{\hat{s}} - p_i\right)} = H_0 \frac{(\prod_{i=0}^M \left(-\frac{a}{\hat{s}}\right)) \left(\prod_{i=0}^M \left(\frac{\hat{s}}{a/z_i} - 1\right)\right)}{(\prod_{i=0}^N \left(-\frac{a}{\hat{s}}\right)) \left(\prod_{i=0}^N \left(\frac{\hat{s}}{a/p_i} - 1\right)\right)} \\
 &= H_0 \left(\left(-\frac{\hat{s}}{a}\right)^{N-M}\right) \frac{\left(\prod_{i=0}^M \left(\frac{\hat{s}}{a/z_i} - 1\right)\right)}{\left(\prod_{i=0}^N \left(\frac{\hat{s}}{a/p_i} - 1\right)\right)} \\
 &= H_0 \frac{\left(\prod_{i=0}^M \left(-\frac{1}{\hat{s}}\right)\right) \left(\prod_{i=0}^M z_i\right) \left(\prod_{i=0}^M \left(\hat{s} - \frac{a}{z_i}\right)\right)}{\left(\prod_{i=0}^N \left(-\frac{1}{\hat{s}}\right)\right) \left(\prod_{i=0}^N p_i\right) \left(\prod_{i=0}^N \left(\hat{s} - \frac{a}{p_i}\right)\right)} = H_0 \left((- \hat{s})^{N-M}\right) \frac{\left(\prod_{i=0}^M z_i\right) \left(\prod_{i=0}^M \left(\hat{s} - \frac{a}{z_i}\right)\right)}{\left(\prod_{i=0}^N p_i\right) \left(\prod_{i=0}^N \left(\hat{s} - \frac{a}{p_i}\right)\right)} \\
 \hat{\omega}_p &= \frac{a}{\omega_p} \quad \hat{\omega}_a = \frac{a}{\omega_a}
 \end{aligned}$$

Obrnuto da bi $\omega_p = 1 \quad a = \hat{\omega}_p \omega_p \Rightarrow \omega_a = \frac{a}{\hat{\omega}_a} \Rightarrow \omega_a - \omega_p = a \frac{\hat{\omega}_a - \hat{\omega}_p}{\hat{\omega}_p \hat{\omega}_a}$



NF -> PO $s = \frac{\hat{s}^2 + \omega_0^2}{B\hat{s}}$

$$\begin{aligned}
 H(s) &= H_0 \frac{\prod_{i=0}^M (s - z_i)}{\prod_{i=0}^N (s - p_i)} = H_0 \frac{(\prod_{i=0}^M z_i) \left(\prod_{i=0}^M \left(\frac{s}{z_i} - 1\right)\right)}{(\prod_{i=0}^N p_i) \left(\prod_{i=0}^N \left(\frac{s}{p_i} - 1\right)\right)} \\
 H(\hat{s}) &= H_0 \frac{\prod_{i=0}^M \left(\frac{\hat{s}^2 + \omega_0^2}{B\hat{s}} - z_i\right)}{\prod_{i=0}^N \left(\frac{\hat{s}^2 + \omega_0^2}{B\hat{s}} - p_i\right)} = H_0 \frac{\left(\prod_{i=0}^M \frac{1}{B\hat{s}}\right) \left(\prod_{i=0}^M (\hat{s}^2 - \hat{s}Bz_i + \omega_0^2)\right)}{\left(\prod_{i=0}^N \frac{1}{B\hat{s}}\right) \left(\prod_{i=0}^N (\hat{s}^2 - \hat{s}Bp_i + \omega_0^2)\right)} = \\
 &= H_0 \frac{\left(\prod_{i=0}^M \frac{1}{B\hat{s}}\right) \left(\prod_{i=0}^M (\hat{s} - z_{i1})(\hat{s} - z_{i2})\right)}{\left(\prod_{i=0}^N \frac{1}{B\hat{s}}\right) \left(\prod_{i=0}^N (\hat{s} - p_{i1})(\hat{s} - p_{i2})\right)} = H_0 \left((B\hat{s})^{N-M}\right) \frac{\left(\prod_{i=0}^M (\hat{s} - z_{i1})(\hat{s} - z_{i2})\right)}{\left(\prod_{i=0}^N (\hat{s} - p_{i1})(\hat{s} - p_{i2})\right)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_i &\Rightarrow x_{i1,2} = \frac{1}{2} \left(Bx_i \pm \sqrt{(Bx_i)^2 - 4\omega_0^2} \right) = \frac{B}{2} \left(x_i \pm \sqrt{x_i^2 - \frac{4\omega_0^2}{B^2}} \right) \Rightarrow x_{i1} + x_{i2} = Bx_i \\
 &\Rightarrow x_{i1}x_{i2} = \omega_0^2
 \end{aligned}$$



Ne zaboraviti
negativne učestanosti

$$s = \frac{\hat{s}^2 + \omega_0^2}{B\hat{s}} \Rightarrow j\omega = \frac{(j\hat{\omega})^2 + \omega_0^2}{Bj\hat{\omega}} \Rightarrow \omega = \frac{1}{B} \frac{\hat{\omega}^2 - \omega_0^2}{\hat{\omega}}$$

$$s = \frac{\hat{s}^2 + \omega_0^2}{B\hat{s}} \Rightarrow -j\omega = \frac{(j\hat{\omega})^2 + \omega_0^2}{Bj\hat{\omega}} \Rightarrow \omega = \frac{1}{B} \frac{\omega_0^2 - \hat{\omega}^2}{\hat{\omega}}$$

$$\omega_p \Rightarrow \hat{\omega}_{p1} \Rightarrow \hat{\omega}_{p1}^2 + B\omega_p \hat{\omega}_{p1} - \omega_0^2 \Rightarrow \hat{\omega}_{p1} = \frac{1}{2} \left(-B\omega_p \pm \sqrt{(B\omega_p)^2 + 4\omega_0^2} \right)$$

$$\omega_p \Rightarrow \hat{\omega}_{p2} \Rightarrow \hat{\omega}_{p2}^2 - B\omega_p \hat{\omega}_{p2} - \omega_0^2 \Rightarrow \hat{\omega}_{p2} = \frac{1}{2} \left(+B\omega_p \pm \sqrt{(B\omega_p)^2 + 4\omega_0^2} \right)$$

$$\hat{\omega}_{p1,2} = \frac{1}{2} \left(\pm B\omega_p + \sqrt{(B\omega_p)^2 + 4\omega_0^2} \right)$$

$$\hat{\omega}_{a1,2} = \frac{1}{2} \left(\pm B\omega_a + \sqrt{(B\omega_a)^2 + 4\omega_0^2} \right)$$

$$\hat{\omega}_{p2} - \hat{\omega}_{p1} = B\omega_p \quad \hat{\omega}_{p1}\hat{\omega}_{p2} = \omega_0^2$$

$$\hat{\omega}_{a2} - \hat{\omega}_{a1} = B\omega_a \quad \hat{\omega}_{a1}\hat{\omega}_{a2} = \omega_0^2$$



Obrnuto da bi $\omega_p = 1$

$$s = \frac{\hat{s}^2 + \omega_0^2}{B\hat{s}}$$

$$\omega_0^2 = \hat{\omega}_{p1}\hat{\omega}_{p2}$$

$$\omega_p = \frac{\hat{\omega}_{p2}^2 - \omega_0^2}{B\hat{\omega}_{p2}} = \frac{\omega_0^2 - \hat{\omega}_{p1}^2}{B\hat{\omega}_{p1}} \Rightarrow B = \frac{\hat{\omega}_{p2} - \hat{\omega}_{p1}}{\omega_p}$$

$$\omega_a = \frac{\hat{\omega}_{a2}^2 - \omega_0^2}{B\hat{\omega}_{a2}} = \frac{\omega_0^2 - \hat{\omega}_{a1}^2}{B\hat{\omega}_{a1}} = \frac{1}{B} (\hat{\omega}_{a2} - \hat{\omega}_{a1})$$



NF -> NO

$$s = \frac{B\hat{s}}{\hat{s}^2 + \omega_0^2}$$

$$H(s) = H_0 \frac{\prod_{i=0}^M (s - z_i)}{\prod_{i=0}^N (s - p_i)} = H_0 \frac{(\prod_{i=0}^M z_i) \left(\prod_{i=0}^M \left(\frac{s}{z_i} - 1 \right) \right)}{(\prod_{i=0}^N p_i) \left(\prod_{i=0}^N \left(\frac{s}{p_i} - 1 \right) \right)}$$

$$\begin{aligned} H(\hat{s}) &= H_0 \frac{\prod_{i=0}^M \left(\frac{B\hat{s}}{\hat{s}^2 + \omega_0^2} - z_i \right)}{\prod_{i=0}^N \left(\frac{B\hat{s}}{\hat{s}^2 + \omega_0^2} - p_i \right)} = H_0 \frac{\left(\prod_{i=0}^M \left(-\frac{1}{\hat{s}^2 + \omega_0^2} \right) \right) (\prod_{i=0}^M (\hat{s}^2 z_i - \hat{s}B + \omega_0^2 z_i))}{\left(\prod_{i=0}^N \left(-\frac{1}{\hat{s}^2 + \omega_0^2} \right) \right) (\prod_{i=0}^N (\hat{s}^2 p_i - \hat{s}B + \omega_0^2 p_i))} = \\ &= H_0 \frac{\left(\prod_{i=0}^M \left(-\frac{1}{\hat{s}^2 + \omega_0^2} \right) \right) (\prod_{i=0}^M (\hat{s} - z_{i1})(\hat{s} - z_{i2}))}{\left(\prod_{i=0}^N \left(-\frac{1}{\hat{s}^2 + \omega_0^2} \right) \right) (\prod_{i=0}^N (\hat{s} - p_{i1})(\hat{s} - p_{i2}))} = H_0 \left((-\hat{s}^2 + \omega_0^2)^{N-M} \right) \frac{(\prod_{i=0}^M (\hat{s} - z_{i1})(\hat{s} - z_{i2}))}{(\prod_{i=0}^N (\hat{s} - p_{i1})(\hat{s} - p_{i2}))} \end{aligned}$$

$$x_i \Rightarrow x_{i1,2} = \frac{1}{2x_i} \left(B \pm \sqrt{B^2 - 4x_i^2 \omega_0^2} \right) = \frac{B}{2} \left(\frac{1}{x_i} \pm \sqrt{\frac{1}{x_i^2} - \frac{4\omega_0^2}{B^2}} \right) \Rightarrow x_{i1} + x_{i2} = B/x_i \Rightarrow x_{i1}x_{i2} = \omega_0^2$$



Ne zaboraviti negativne učestanosti

$$s = \frac{B\hat{\omega}}{\hat{\omega}^2 + \omega_0^2} \Rightarrow j\omega = \frac{Bj\hat{\omega}}{(j\hat{\omega})^2 + \omega_0^2} \Rightarrow \omega = B \frac{\hat{\omega}}{\omega_0^2 - \hat{\omega}^2}$$

$$s = \frac{B\hat{\omega}}{\hat{\omega}^2 + \omega_0^2} \Rightarrow -j\omega = \frac{Bj\hat{\omega}}{(j\hat{\omega})^2 + \omega_0^2} \Rightarrow \omega = B \frac{\hat{\omega}}{\hat{\omega}^2 - \omega_0^2}$$

$$\omega_p \Rightarrow \hat{\omega}_{p1} \Rightarrow \hat{\omega}_{p1}^2 \omega_p - B\hat{\omega}_{p1} - \omega_p \omega_0^2 \Rightarrow \hat{\omega}_{p1} = \frac{1}{2\omega_p} \left(-B \pm \sqrt{B^2 + 4\omega_p^2 \omega_0^2} \right)$$

$$\omega_p \Rightarrow \hat{\omega}_{p2} \Rightarrow \hat{\omega}_{p2}^2 \omega_p + B\hat{\omega}_{p2} - \omega_p \omega_0^2 \Rightarrow \hat{\omega}_{p2} = \frac{1}{2\omega_p} \left(+B \pm \sqrt{B^2 + 4\omega_p^2 \omega_0^2} \right)$$

$$\hat{\omega}_{p1,2} = \frac{1}{2\omega_p} \left(\pm B + \sqrt{B^2 + 4\omega_p^2 \omega_0^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\pm B/\omega_p + \sqrt{(B/\omega_p)^2 + 4\omega_0^2} \right)$$

$$\hat{\omega}_{a1,2} = \frac{1}{2\omega_a} \left(\pm B + \sqrt{B^2 + 4\omega_a^2 \omega_0^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\pm B/\omega_a + \sqrt{(B/\omega_a)^2 + 4\omega_0^2} \right)$$

$$\hat{\omega}_{p2} - \hat{\omega}_{p1} = B/\omega_p \quad \hat{\omega}_{p1}\hat{\omega}_{p2} = \omega_0^2$$

$$\hat{\omega}_{a2} - \hat{\omega}_{a1} = B/\omega_a \quad \hat{\omega}_{a1}\hat{\omega}_{a2} = \omega_0^2$$



Obrnuto da bi $\omega_p = 1$

$$s = \frac{B\hat{s}}{\hat{s}^2 + \omega_0^2}$$

$$\begin{aligned}\omega_0^2 &= \hat{\omega}_{p1}\hat{\omega}_{p2} \\ \omega_p &= \frac{B\hat{\omega}_{p1}}{\omega_0^2 - \hat{\omega}_{p1}^2} = \frac{B\hat{\omega}_{p2}}{\hat{\omega}_{p2}^2 - \omega_0^2} \Rightarrow B = \omega_p(\hat{\omega}_{p2} - \hat{\omega}_{p1}) \\ \omega_a &= \frac{B\hat{\omega}_{a1}}{\omega_0^2 - \hat{\omega}_{a1}^2} = \frac{B\hat{\omega}_{a2}}{\hat{\omega}_{a2}^2 - \omega_0^2} = \frac{B}{(\hat{\omega}_{a2} - \hat{\omega}_{a1})}\end{aligned}$$



Prelazak iz analognih funkcija prenosa u diskretne



Podsećanje

$x[n] = \mathcal{Z}^{-1} \{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z)z^{n-1} dz$		$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$X(z) = \mathcal{Z} \{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$	ROC
transform	$x[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$X(z)$	R_x
time reversal	$x[-n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$X\left(\frac{1}{z}\right)$	$\frac{1}{R_x}$
complex conjugation	$x^*[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$X^*(z^*)$	R_x
reversed conjugation	$x^*[-n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$X^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$	$\frac{1}{R_x}$
real part	$\Re\{x[n]\}$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$	R_x
imaginary part	$\Im\{x[n]\}$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]$	R_x
time shifting	$x[n - n_0]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$z^{-n_0} X(z)$	R_x
scaling in \mathcal{Z}	$a^n x[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$	$ a R_x$
downsampling by N	$x[Nn], N \in \mathbb{N}_0$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(W_N^k z^{\frac{1}{N}}\right) \quad W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$	R_x
linearity	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	$R_x \cap R_y$
time multiplication	$x_1[n]x_2[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{1}{2\pi j} \oint X_1(u)X_2\left(\frac{z}{u}\right) u^{-1} du$	$R_x \cap R_y$
frequency convolution	$x_1[n] * x_2[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$X_1(z)X_2(z)$	$R_x \cap R_y$



delta function	$\delta[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	1	$\forall z$
shifted delta function	$\delta[n - n_0]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	z^{-n_0}	$\forall z$
step	$u[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
	$-u[-n - 1]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{z}{z-1}$	$ z < 1$
ramp	$nu[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$ z > 1$
	$n^2 u[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$ z > 1$
	$-n^2 u[-n - 1]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$ z < 1$
	$n^3 u[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$	$ z > 1$
	$-n^3 u[-n - 1]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$	$ z < 1$
	$(-1)^n$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{z}{z+1}$	$ z < 1$



exponential	$a^n u[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{z}{z-a}$	$ z > a $
	$-a^n u[-n-1]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{z}{z-a}$	$ z < a $
	$a^{n-1} u[n-1]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{1}{z-a}$	$ z > a $
	$na^n u[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$ z > a $
	$n^2 a^n u[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$	$ z > a $
	$e^{-an} u[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{z}{z-e^{-a}}$	$ z > e^{-a} $
exp. interval	$\begin{cases} a^n & n = 0, \dots, N-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$ z > 0$
sine	$\sin(\omega_0 n) u[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{z \sin(\omega_0)}{z^2 - 2 \cos(\omega_0) z + 1}$	$ z > 1$
cosine	$\cos(\omega_0 n) u[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{z(z - \cos(\omega_0))}{z^2 - 2 \cos(\omega_0) z + 1}$	$ z > 1$
	$a^n \sin(\omega_0 n) u[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{za \sin(\omega_0)}{z^2 - 2a \cos(\omega_0) z + a^2}$	$ z > a$
	$a^n \cos(\omega_0 n) u[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{z(z - a \cos(\omega_0))}{z^2 - 2a \cos(\omega_0) z + a^2}$	$ z > a$



$$H(z) \Rightarrow |H(e^{j\omega})|^2$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = A^2$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega})H(e^{-j\omega}) = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = A^2$$

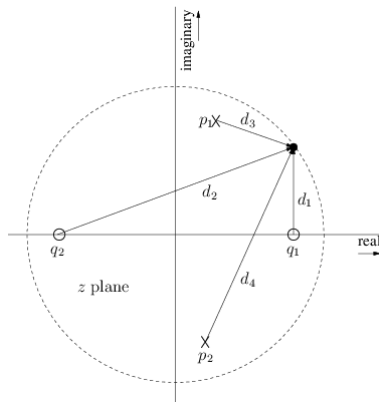
$$h(n) * h^*(-n) = A^2 \delta(n)$$

$$H(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) = A^2$$



$$H(s) = H_0 \frac{\prod_{i=0}^M (s - z_i)}{\prod_{i=0}^N (s - p_i)} = H_0 \frac{(\prod_{i=0}^M z_i) (\prod_{i=0}^M (\frac{s}{z_i} - 1))}{(\prod_{i=0}^N p_i) (\prod_{i=0}^N (\frac{s}{p_i} - 1))} = H_0 s^{(M-N)} \frac{\prod_{i=0}^M (1 - \frac{z_i}{s})}{\prod_{i=0}^N (1 - \frac{p_i}{s})}$$

$$H(z) = H_0 \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} = H_1 z^{(N-M)} \frac{\prod_{i=0}^M (z - z_i)}{\prod_{i=0}^N (z - p_i)} = H_1 z^{(N-M)} \frac{(\prod_{i=0}^M z_i) (\prod_{i=0}^M (\frac{z}{z_i} - 1))}{(\prod_{i=0}^N p_i) (\prod_{i=0}^N (\frac{z}{p_i} - 1))}$$



$H(s) \rightarrow H(z)$

Postupkom transformacije analogne funkcije prenosa u digitalnu funkciju prenosa treba da se očuvaju neka važna svojstva analognog sistema.

1. Transformacija mora biti racionalna, tj. polazeći od analogne funkcije prenosa koja je racionalna funkcija kompleksne učestanosti s , treba da se dobije racionalna funkcija kompleksne učestanosti z .
2. Zbog održanja stabilnosti sistema, polovi analogne funkcije prenosa koji leže u levoj polovini ravni kompleksne učestanosti s , moraju se preslikati unutar jediničnog kruga u ravni kompleksne učestanosti z .
3. Poželjno je da se transformacijom ne povećava red funkcije prenosa.



Impulsno invarijantna transformacija

Ideja

impulsni odziv diskretnog sistema $h[n]$

dobija se diskretizacijom

impulsnog odziva analognog sistema $h_a(t)$

$$h[n] = h_a(nT), \quad n = 0, 1, \dots$$

Šta se dešava u frekvencijskom domenu?

odabiranje

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk\omega_s t} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jk\omega_s t}$$

spektar odabranog signala

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_a(t) s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} h_a(t) \left(\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jk\omega_s t} \right) e^{-j\omega t} dt$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h_a(t) e^{-j(\omega + k\omega_s)t} dt \right)$$

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a \left[j(\omega + k\omega_s) \right] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a \left[j \left(\frac{\Omega}{T} + \frac{2k\pi}{T} \right) \right]$$



Ograničen

$$H_a(j\omega) \approx 0, \quad |\omega| > \frac{\omega_s}{2}$$

Nema preklapanja

U opsegu od interesa

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} H_a \left[j(\omega + k\omega_s) \right] \approx 0, \quad |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2}$$

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} H_a(j\omega) = \frac{1}{T} H_a \left(\frac{j\Omega}{T} \right), \quad |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2}$$

Ništa novo, sve već poznato i izvedeno



Ako je zadovoljen uslov

$$H_a(j\omega) \approx 0, |\omega| > \frac{\omega_s}{2}$$

I polovi analogne funkcije prosti

$$H_a(s) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s - p_i}$$

Inverzna Laplasova transformacija

$$h_a(t) = \sum_{i=1}^N A_i e^{p_i t}$$



Diskretizacija
$$h_a(nT) = h[n] = \sum_{i=1}^N A_i e^{p_i nT}$$

Z transformacija

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^N A_i e^{p_i nT} \right) z^{-n} = \sum_{i=1}^N A_i \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{p_i nT} z^{-n} \right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{p_i nT} z^{-n} = \frac{1 - (e^{p_i T} z^{-1})^{\infty}}{1 - e^{p_i T} z^{-1}}$$

$$\frac{1 - e^{p_i T} z^{-1}}{1 - e^{p_i T} z^{-1}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{p_i nT} z^{-n} = \frac{1}{1 - e^{p_i T} z^{-1}} \left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{p_i nT} z^{-n} \right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{p_i (n+1)T} z^{-(n+1)T} \right) \right)$$

$$e^{p_i 0T} z^{-0} = 1$$

$$H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i z}{z - e^{p_i T}} = \frac{N(z)}{\prod_{i=1}^N (z - e^{p_i T})}$$



polovi analognog sistema p_i preslikavaju se u polove digitalnog sistema z_i

$$z_i = e^{p_i T} = e^{(\sigma_i + j\omega_i)T}$$

položaj nula diskretnog sistema se ne može predvideti

1. Konjugovano kompleksni par polova iz s ravni preslikavanjem daje konjugovano kompleksni par polova u z ravni. Koeficijenti diskretne funkcije prenosa su realni, tj. transformacija je racionalna.
2. Transformacija je stabilna jer se polovi stabilnog analognog sistema, kod kojih je $\sigma < 0$ i , preslikavaju u polove diskretnog sistema unutar jediničnog kruga.
3. Treće, ne povećava se red funkcije prenosa.

Veza između analogne učestanosti ω i digitalne učestanosti Ω je linearna.

$$\Omega = \omega T = 2\pi f / f_s = 2\pi F$$

gde je F normalizovana učestanost



Na žalost, neke važne klase selektivnih filtarskih funkcija, kao što su, na primer, propusnici visokih učestanosti i nepropusnici opsega, ne mogu se korektno preslikati impulsno invarijantnom transformacijom jer ne zadovoljavaju uslov ograničenosti frekvencijskog odziva.

Impulsno invarijantna transformacija takođe nije pogodna ni za preslikavanje eliptičkih filtarskih funkcija jer uslov ograničenosti frekvencijskog odziva ne može biti zadovoljen izborom dovoljno visoke učestanosti odabiranja.



Modifikovana impulsno invarijantna transformacija

Kada je funkcija prenosa analognog sistema racionalna, (ima nula), obično je teško zadovoljiti uslov ograničenosti frekvencijskog odziva

$$H_a(s) = H_0 \frac{N(s)}{D(s)} = H_0 \frac{\prod_{i=1}^M (s - s_i)}{\prod_N (s - p_i)}$$

Predstava u ovom obliku $H_a(s) = H_0 \frac{H_{a1}(s)}{H_{a2}(s)}$

$$H_{a1}(s) = \frac{1}{D(s)} \quad H_{a2}(s) = \frac{1}{N(s)}$$

Obe funkcije imaju samo polove!



$$H_1(z) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i z}{z - e^{p_i T}} = \frac{N_1(z)}{D_1(z)}$$

$$H_2(z) = \sum_{i=1}^M \frac{B_i z}{z - e^{s_i T}} = \frac{N_2(z)}{D_2(z)}$$

$$H_1(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} H_{a1}(j\omega) = \frac{1}{T} H_{a1}\left(\frac{j\Omega}{T}\right), \quad |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2}$$

$$H_2(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} H_{a2}(j\omega) = \frac{1}{T} H_{a2}\left(\frac{j\Omega}{T}\right), \quad |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2}$$



$$H(z) = H_0 \frac{H_1(z)}{H_2(z)} = H_0 \frac{N_1(z)D_2(z)}{N_2(z)D_1(z)} = H_0 \frac{N_1(z)}{N_2(z)} \frac{\prod_{i=1}^M (z - e^{s_i T})}{\prod_{i=1}^N (z - e^{p_i T})}$$

Važi
$$H(e^{j\Omega}) = H_0 \frac{H_1(e^{j\Omega})}{H_2(e^{j\Omega})} = H_a(j\omega) = H_a\left(\frac{j\Omega}{T}\right)$$

Problem:

Polinom $D_1(z)$ sigurno ima korenove unutar jediničnog kruga jer se oni dobijaju preslikavanjem polova analogne funkcije prenosa.

Položaj korenova polinoma $N_2(z)$ se ne može kontrolisati, tako da se deo polova može naći izvan jediničnog kruga.

Nestabilna funkcija prenosa!



Uskladena Z transformacija

$$H(z) = H_0 \frac{H_1(z)}{H_2(z)} = H_0 \frac{N_1(z)D_2(z)}{N_2(z)D_1(z)} = H_0 \frac{N_1(z)}{N_2(z)} \frac{\prod_{i=1}^M (z - e^{s_i T})}{\prod_{i=1}^N (z - e^{p_i T})}$$

$$L = N - M$$

$$H(z) = H_0 (z+1)^L \frac{\prod_{i=1}^M (z - e^{s_i T})}{\prod_{i=1}^N (z - e^{p_i T})}$$



Bilinearna transformacija

Najčešće korišćenja

Idealni integrator $H_I(s) = \frac{1}{s}$

$$h_I(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0^+ \\ 0 & t \leq 0^- \end{cases}$$

Odziv na proizvoljnu pobudu - konvolucija

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) h_I(t - \tau) d\tau$$



Neka je $0^+ < \tau \leq t_1 < t_2$. Tada važi:

$$y(t_2) - y(t_1) = \int_0^{t_2} x(\tau) h_I(t_2 - \tau) d\tau - \int_0^{t_1} x(\tau) h_I(t_1 - \tau) d\tau = \int_{t_1}^{t_2} x(\tau) d\tau$$

$$h_I(t_1 - \tau) = h_I(t_2 - \tau) = 1$$

$$t_1 \approx t_2$$

$$y(t_2) - y(t_1) \approx \frac{t_2 - t_1}{2} [x(t_1) + x(t_2)]$$

$$t_1 = nT - T, t_2 = nT$$

$$y(nT) - y(nT - T) = \frac{T}{2} [x(nT - T) + x(nT)]$$



diferencna

$$y(nT) - y(nT - T) = \frac{T}{2} [x(nT - T) + x(nT)]$$

Z transformacija

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) = \frac{T}{2} [z^{-1}X(z) + X(z)]$$

odnosno

$$H_I(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1}$$



analogna

$$H_I(s) = \frac{1}{s}$$

diskretna

$$H_I(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1}$$

smenom

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

Bilinearna transformacija

Odziv na proizvoljnu pobudu diskretnog sistema je **približno** jednak odzivu analognog sistema od koga je dobijen transformacijom.

Bilinearna transformacija je racionalna transformacija koja ne povećava red funkcije prenosa.



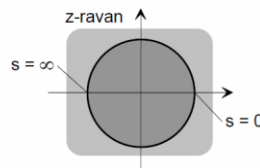
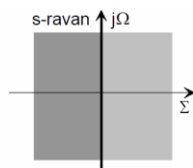
$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2z-1}{Tz+1}} = H_{0a} \frac{\prod_{i=1}^M (s - u_i)}{\prod_{i=1}^N (s - s_i)} \Big|_{s=\frac{2z-1}{Tz+1}} = H_{0d} (z+1)^{N-M} \frac{\prod_{i=1}^M (z - z_i)}{\prod_{i=1}^N (z - p_i)}$$



Stabilnost?

$$z = \frac{2/T + s}{2/T - s} \quad s = \sigma + j\omega \quad |z| = \left[\frac{(2/T + \sigma)^2 + \omega^2}{(2/T - \sigma)^2 + \omega^2} \right]^{1/2}$$

1. Imaginarna osa u s -ravni ($\sigma = 0$) se preslikava u jedinični krug u z -ravni ($|z| = 1$).
2. Leva polovina s -ravni ($\sigma < 0$) se preslikava unutar jediničnog kruga u z -ravni ($|z| < 1$).
3. Desna polovina s -ravni ($\sigma > 0$) se preslikava izvan jediničnog kruga u z -ravni ($|z| > 1$).
4. Koordinatni početak iz s -ravni ($s = 0 + j0$) se preslikava u tačku $z = 1 + j0$ u z -ravni.
5. Tačka u beskonačnosti iz s -ravni ($s = \infty$) se preslikava u tačku $z = -1 + j0$ u z -ravni.



Stabilna?



Preslikavanje učestanosti baš i nije linearno

$$|z| = \left[\frac{(2/T + \sigma)^2 + \omega^2}{(2/T - \sigma)^2 + \omega^2} \right]^{1/2}$$

Da vidimo šta se dešava

$$z = \frac{2/T + s}{2/T - s} \quad s = j\omega \text{ i } z = e^{j\Omega} \quad j\omega = \frac{2 e^{j\Omega/2} - 1}{T e^{j\Omega/2} + 1} = \frac{2 e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}}{T e^{j\Omega/2} + e^{-j\Omega/2}}$$

$$\omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\Omega}{2}$$



$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2z-1}{Tz+1}} = H_{0a} \frac{\prod_{i=1}^M (s - u_i)}{\prod_{i=1}^N (s - s_i)} \Big|_{s=\frac{2z-1}{Tz+1}} = H_{0d} (z+1)^{N-M} \frac{\prod_{i=1}^M (z - z_i)}{\prod_{i=1}^N (z - p_i)}$$

Zbog nelinearne transformacije učestanosti,
amplitudska i fazna karakteristika su izobličene.

Posle bilinearne transformacije, vrednosti
amplitude ostaju iste samo se
menja položaj maksimuma i minimuma
amplitudske karakteristike.

Isto je i sa fazom.
Bitna faza – impulsno invarijantne transformacije.

Kod preslikavanja selektivnih filtarskih funkcija, gde fazna
karakteristika nije od interesa, efekat distorzije skale
učestanosti se može eliminisati
predistorzijom karakteristike analognog filtra.



1. Zadavanje specifikacija u diskretnom domenu i predistorzija karakterističnih učestanosti
2. Određivanje reda N i sinteza analognog filtra na osnovu specifikacija
3. Transformacija nula i polova analognog filtra u nule i polove diskretnog filtra

$$z = \frac{2/T + s}{2/T - s}$$

4. Izračunavanje multiplikativne konstante H_{0d} iz $H(1) = H_a(0)$ ili sličnog uslova

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2z-1}{Tz+1}} = H_{0d} \frac{\prod_{i=1}^M (s - u_i)}{\prod_{i=1}^M (s - s_i)} \Big|_{s=\frac{2z-1}{Tz+1}} = H_{0d} (z+1)^{N-M} \frac{\prod_{i=1}^M (z - z_i)}{\prod_{i=1}^M (z - p_i)}$$

5. Formiranje $H(z)$

6. Preslikavanje $H(z)$ u drugi tip funkcije prenosa, ukoliko nije izvršeno u fazi 2



Da bi se držali notacije u knjizi.

Ranije

- ω analogna prototipska učestanost pri čemu je najzgodnije bilo $\omega_p = 1$
- $\hat{\omega}$ stvarne željene učestanosti

U nastavku

- Ω učestanosti u digitalnom domenu $0 \leq \Omega \leq 2\pi$ ($0 \leq f \leq f_s$)
- $\bar{\Omega}$ željene učestanosti u digitalnom domenu $0 \leq \bar{\Omega} \leq 2\pi$ ($0 \leq \bar{f} \leq f_s$)
- ω analogne učestanosti
- $\bar{\omega}$ željene analogne učestanosti
- $\tilde{\omega}$ analogna prototipska učestanost pri čemu je najzgodnije $\tilde{\omega}_p = 1$



kod NF filtra

$$\bar{\omega}_p = \frac{2}{T} \tan \frac{\bar{\Omega}_p}{2}$$

$$\bar{\omega}_a = \frac{2}{T} \tan \frac{\bar{\Omega}_a}{2}$$

Zanimljivo je da će se zbog distorzije učestanosti pojaviti

$$\frac{\bar{\omega}_a}{\bar{\omega}_p} = \frac{\tan \frac{\bar{\Omega}_a}{2}}{\tan \frac{\bar{\Omega}_p}{2}} > \frac{\bar{\Omega}_a}{\bar{\Omega}_p}$$

Strmina diskretnog veća



NF -> NF

$$\tilde{\omega} = a \bar{\omega}$$

$$\tilde{\omega}_p = \frac{2}{T} a \tan \frac{\bar{\Omega}_p}{2} \rightarrow \tilde{\omega}_p = 1 \rightarrow a = \frac{T \tilde{\omega}_p}{2 \tan \frac{\bar{\Omega}_p}{2}}$$
$$\tilde{\omega}_a = \frac{2}{T} a \tan \frac{\bar{\Omega}_a}{2}$$

$$k = \frac{\tilde{\omega}_p}{\tilde{\omega}_a} = \frac{\tan \frac{\bar{\Omega}_p}{2}}{\tan \frac{\bar{\Omega}_a}{2}}$$



NF -> VF

$$\tilde{\omega} = \frac{a}{\bar{\omega}}$$

$$\tilde{\omega}_p = \frac{a}{\frac{2}{T} \tan \frac{\bar{\Omega}_p}{2}} \rightarrow \tilde{\omega}_p = 1 \rightarrow a = \frac{2\tilde{\omega}_p \tan \frac{\bar{\Omega}_p}{2}}{T}$$

$$k = \frac{\tilde{\omega}_p}{\tilde{\omega}_a} = \frac{\bar{\omega}_a}{\bar{\omega}_p} = \frac{\tan \frac{\bar{\Omega}_a}{2}}{\tan \frac{\bar{\Omega}_p}{2}}$$



NF -> PO

$$\bar{\omega}_{pi} = \frac{2}{T} \tan \frac{\bar{\Omega}_{pi}}{2}, \quad i = 1, 2$$

Učestanosti se preslikavaju

$$\bar{\omega}_{ai} = \frac{2}{T} \tan \frac{\bar{\Omega}_{ai}}{2}, \quad i = 1, 2$$

$$K_A = \tan \frac{\bar{\Omega}_{p2}}{2} - \tan \frac{\bar{\Omega}_{p1}}{2}$$

$$K_B = \tan \frac{\bar{\Omega}_{p1}}{2} \tan \frac{\bar{\Omega}_{p2}}{2}$$

$$K_C = \tan \frac{\bar{\Omega}_{a1}}{2} \tan \frac{\bar{\Omega}_{a2}}{2}$$

Pomoćne konstante



$$B\tilde{\omega}_p = \bar{\omega}_{p2} - \bar{\omega}_{p1}$$

$$B\tilde{\omega}_a = \bar{\omega}_{a2} - \bar{\omega}_{a1}$$

$$\bar{\omega}_0^2 = \bar{\omega}_{p1}\bar{\omega}_{p2} = \bar{\omega}_{a1}\bar{\omega}_{a2}$$

$$\bar{\omega}_{p1}, \bar{\omega}_{p2} = \frac{1}{2} \left(\pm \tilde{\omega}_p B + \sqrt{\tilde{\omega}_p^2 B^2 + 4\bar{\omega}_0^2} \right)$$

$$\bar{\omega}_{a1}, \bar{\omega}_{a2} = \frac{1}{2} \left(\pm \tilde{\omega}_a B + \sqrt{\tilde{\omega}_a^2 B^2 + 4\bar{\omega}_0^2} \right)$$



Stvarni u prototipski

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{B} \left(\bar{\omega} - \frac{\bar{\omega}_0^2}{\bar{\omega}} \right)$$

$$B = \frac{\bar{\omega}_{p2} - \bar{\omega}_{p1}}{\tilde{\omega}_p} = \frac{2 \left(\tan \frac{\bar{\Omega}_{p2}}{2} - \tan \frac{\bar{\Omega}_{p1}}{2} \right)}{T \tilde{\omega}_p} = \frac{2K_A}{T \tilde{\omega}_p}$$

$$\bar{\omega}_0 = \sqrt{\bar{\omega}_{p1}\bar{\omega}_{p2}} = \frac{2 \sqrt{\tan \frac{\bar{\Omega}_{p1}}{2} \tan \frac{\bar{\Omega}_{p2}}{2}}}{T} = \frac{2\sqrt{K_B}}{T}$$



$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{p1} \bar{\omega}_{p2} < \bar{\omega}_{a1} \bar{\omega}_{a2} & \quad \bar{\omega}_0^2 = \bar{\omega}_{a1} \bar{\omega}'_{a2} & \quad \bar{\omega}'_{a2} \leq \bar{\omega}_{a2} \\ (K_B < K_C) & & \\ \tilde{\omega}_a = \frac{1}{B}(\bar{\omega}'_{a2} - \bar{\omega}_{a1}) = \frac{1}{B} \left(\frac{\bar{\omega}_0^2}{\bar{\omega}_{a1}} - \bar{\omega}_{a1} \right) = \frac{\bar{\omega}_0^2 - \bar{\omega}_{a1}^2}{B \bar{\omega}_{a1}} = \frac{\left(\frac{2}{T} \right)^2 K_B - \left(\frac{2}{T} \tan \frac{\Omega_{a1}}{2} \right)^2}{\frac{2K_A}{T \tilde{\omega}_p} \frac{2}{T} \tan \frac{\Omega_{a1}}{2}} \end{aligned}$$

$$k_1 = \frac{\tilde{\omega}_p}{\tilde{\omega}_a} = \frac{K_A \tan \frac{\Omega_{a1}}{2}}{K_B - \tan^2 \frac{\Omega_{a1}}{2}}$$



$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{p1} \bar{\omega}_{p2} > \bar{\omega}_{a1} \bar{\omega}_{a2} & \quad \bar{\omega}_0^2 = \bar{\omega}'_{a1} \bar{\omega}_{a2} & \quad \bar{\omega}'_{a1} \geq \bar{\omega}_{a1} \\ (K_B > K_C) & & \\ \tilde{\omega}_a = \frac{1}{B}(\bar{\omega}_{a2} - \bar{\omega}'_{a1}) = \frac{1}{B} \left(\bar{\omega}_{a2} - \frac{\bar{\omega}_0^2}{\bar{\omega}_{a2}} \right) = \frac{\bar{\omega}_{a2}^2 - \bar{\omega}_0^2}{B \bar{\omega}_{a2}} = \frac{\left(\frac{2}{T} \tan \frac{\Omega_{a2}}{2} \right)^2 - \left(\frac{2}{T} \right)^2 K_B}{\frac{2K_A}{T \tilde{\omega}_p} \frac{2}{T} \tan \frac{\Omega_{a2}}{2}} \end{aligned}$$

$$k_2 = \frac{\tilde{\omega}_p}{\tilde{\omega}_a} = \frac{K_A \tan \frac{\Omega_{a2}}{2}}{\tan^2 \frac{\Omega_{a2}}{2} - K_B}$$

$$k = \frac{\tilde{\omega}_p}{\tilde{\omega}_a} = \begin{cases} k_1, & K_B \leq K_C \\ k_2, & K_B \geq K_C \end{cases}$$



NF -> NO

$$\tilde{\omega} = \frac{B\bar{\omega}}{\bar{\omega}_0^2 - \bar{\omega}^2}$$

$$B = \tilde{\omega}_p (\bar{\omega}_{p2} - \bar{\omega}_{p1}) = \frac{2\tilde{\omega}_p \left(\tan \frac{\bar{\Omega}_{p2}}{2} - \tan \frac{\bar{\Omega}_{p1}}{2} \right)}{T} = \frac{2K_A \tilde{\omega}_p}{T}$$

$$k = \frac{\tilde{\omega}_p}{\tilde{\omega}_a} = \begin{cases} 1/k_2, & K_B \leq K_C \\ 1/k_1, & K_B \geq K_C \end{cases}$$

Isto kao PO



Umesto da se radi

digitalni -> analogni -> prototipski analogni,
pa nazad

transformacije iz “prototipskog” digitalnog u druge potrebne realizacije
moguće je uraditi i u digitalnom domenu

Opšti oblik transformacije je

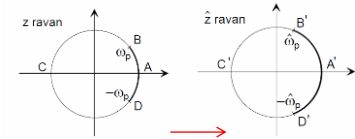
$$z = f(\hat{z}) = e^{jn\pi} \prod_{i=1}^m \frac{\hat{z} - a_i^*}{1 - a_i \hat{z}}$$

gde je z “prototipski”
 \hat{z} željeni



NF ->NF

$$z = e^{jn\pi} \frac{\hat{z} - a^*}{1 - a\hat{z}}$$



$$A \text{ i } A' \quad e^{j0} = e^{jn\pi} \frac{e^{j0} - a^*}{1 - ae^{j0}}$$

$$n = 0, \quad a = a^* = \alpha$$

$$C \text{ i } C' \quad e^{j\pi} = e^{jn\pi} \frac{e^{j\pi} - a^*}{1 - ae^{j\pi}}$$

$$B \text{ i } B' \quad z = e^{j\Omega_p} \\ \hat{z} = e^{j\hat{\Omega}_p}$$

$$\alpha = \frac{\sin \frac{\Omega_p - \hat{\Omega}_p}{2}}{\sin \frac{\Omega_p + \hat{\Omega}_p}{2}}$$

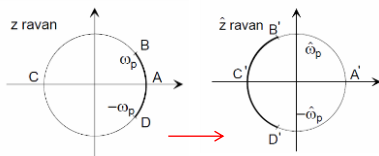
$$\alpha = \frac{\hat{z} - z}{1 - \hat{z}z}$$

$$z = \frac{\hat{z} - \alpha}{1 - \alpha\hat{z}}$$



NF ->VF

$$z = e^{jn\pi} \frac{\hat{z} - a^*}{1 - a\hat{z}}$$



$$A \text{ i } A' \quad e^{j0} = e^{jn\pi} \frac{e^{j\pi} - a^*}{1 - ae^{j\pi}}$$

$$C \text{ i } C' \quad e^{j\pi} = e^{jn\pi} \frac{e^{j0} - a^*}{1 - ae^{j0}}$$

$$B \text{ i } B' \quad z = e^{j\Omega_p} \\ \hat{z} = e^{j\hat{\Omega}_p}$$

$$\alpha = \frac{\cos \frac{\Omega_p - \hat{\Omega}_p}{2}}{\cos \frac{\Omega_p + \hat{\Omega}_p}{2}}$$

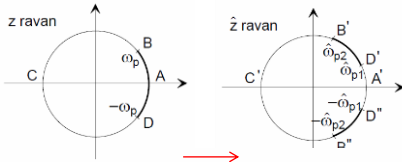
$$\alpha = \frac{\hat{z} + z}{1 + \hat{z}z}$$

$$z = -\frac{\hat{z} - \alpha}{1 - \alpha\hat{z}}$$



NF ->PO

$$z = e^{jn\pi} \frac{\hat{z}^2 + \beta\hat{z} + \gamma}{1 + \beta\hat{z} + \gamma\hat{z}^2}$$



$$n = 1$$

$$\alpha = \frac{\cos \frac{\hat{\Omega}_{p2} + \hat{\Omega}_{p1}}{2}}{\cos \frac{\hat{\Omega}_{p2} - \hat{\Omega}_{p1}}{2}}$$

$$\beta = -\frac{2\alpha}{1+k}$$

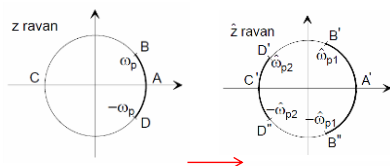
$$\gamma = \frac{k-1}{k+1}$$

$$k = \tan \frac{\Omega_p}{2} \cot \frac{\hat{\Omega}_{p2} - \hat{\Omega}_{p1}}{2}$$



NF ->NO

$$z = e^{jn\pi} \frac{\hat{z}^2 + \beta\hat{z} + \gamma}{1 + \beta\hat{z} + \gamma\hat{z}^2}$$



$$n = 0$$

$$\alpha = \frac{\cos \frac{\hat{\Omega}_{p2} + \hat{\Omega}_{p1}}{2}}{\cos \frac{\hat{\Omega}_{p2} - \hat{\Omega}_{p1}}{2}}$$

$$\beta = -\frac{2\alpha}{1+k}$$

$$\gamma = \frac{1-k}{1+k}$$

$$k = \tan \frac{\Omega_p}{2} \tan \frac{\hat{\Omega}_{p2} - \hat{\Omega}_{p1}}{2}$$



Bitno popraviti faznu karakteristiku

$$H(s) = \frac{s - k}{s + k}$$



Bitno popraviti faznu karakteristiku

$$H(z) = H_F(z)H_{AP}(z)$$

$$H(s) = \frac{s - k}{s + k}, k > 0$$

All pass – neminimalna faza

$$|H_{AP}(e^{j\Omega})| = 1, 0 \leq \Omega \leq \pi$$

$$\tau_{AP}(\Omega) = \tau - \tau_F(\Omega), \Omega_{p1} \leq \Omega \leq \Omega_{p2}$$

$$H_{AP}(z) = \prod_{k=1}^{N_s} \frac{a_{1k} + z^{-1}}{1 + a_{1k}z^{-1}} \quad z_i = \frac{1}{p_i}, i = 1, \dots$$

$$H_{AP}(z) = \prod_{k=1}^{N_s} \frac{a_{2k} + a_{1k}z^{-1} + z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}}$$



Zadatak 3 (30 poena)

Impulsno invarijantnom transformacijom potrebno je projektovati niskopropusni digitalni IIR filter iz analognog Batervortovog prototipa. Specifikacije filtra su: granična učestanost propusnog opsega $\Omega_p = \pi/6$, granična učestanost nepropusnog opsega $\Omega_a = 2\pi/3$, maksimalno dozvoljeno slabljenje u propusnom opsegu $\alpha_p = 3$ dB i minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu $\alpha_a = 24$ dB.

- [15] Odredite granične učestanosti ω_p i ω_a analognog prototipa, a zatim odredite minimalni red filtra kojim će se zadovoljiti definisane specifikacije.
- [5] Skicirajte raspored nula i polova analogne funkcije prenosa.
- [10] Odredite prenosnu funkciju traženog niskopropusnog digitalnog IIR filtra.



Ako želimo prototipski NF na $\omega_p = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

$$\Omega_p = \frac{\pi}{6} \Rightarrow T = \frac{\Omega_p}{\omega_p} = \frac{\pi}{6} \text{ s} \Rightarrow \omega_s = \frac{2\pi}{T} = 12 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\Omega_a = \omega_a T \Rightarrow \omega_a = \frac{\Omega_a}{T} = 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

(a)

$$2\pi: \omega_s = \Omega_p: \omega_p \Rightarrow \omega_s = \frac{2\pi}{\Omega_p} \omega_p = 12 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

ili $T = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{\pi}{6} \text{ s}$

$$2\pi: \omega_s = \Omega_a: \omega_a \Rightarrow \omega_a = \frac{\Omega_a}{2\pi} \omega_s = 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$|H(s)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{s}{j\omega_p}\right)^{2N}}$$

$$\alpha(s) = 20 \log\left(\frac{1}{|H(s)|}\right) = 10 \log\left(\frac{1}{|H(s)|^2}\right) = 10 \log\left(1 + \varepsilon^2 \left(\frac{s}{j\omega_p}\right)^{2N}\right)$$

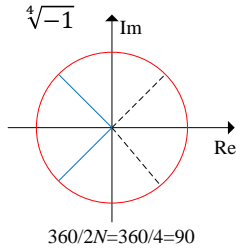
$$\alpha_p = \alpha(j\omega_p) = 10 \log\left(1 + \varepsilon^2 \left(\frac{j\omega_p}{j\omega_p}\right)^{2N}\right) = 10 \log(1 + \varepsilon^2) \quad \varepsilon = \sqrt{10^{0.1\alpha_p} - 1} = 1$$

$$\alpha_a = \alpha(j\omega_a) = 10 \log\left(1 + \varepsilon^2 \left(\frac{j\omega_a}{j\omega_p}\right)^{2N}\right) \quad \left(\frac{\omega_a}{\omega_p}\right)^{2N} = 10^{0.1\alpha_a} - 1$$

$$N \geq \frac{1 \log(10^{0.1\alpha_a} - 1)}{2 \log\left(\frac{\omega_a}{\omega_p}\right)} = 1.99 \Rightarrow N = 2$$



(b)



$$H(s) = \frac{1}{(s - e^{j\frac{3\pi}{4}})(s - e^{-j\frac{3\pi}{4}})}$$

(c)

$$H(s) = \frac{1}{(s - e^{j\frac{3\pi}{4}})(s - e^{-j\frac{3\pi}{4}})}$$

$$H(s) = \frac{A}{(s - e^{j\frac{3\pi}{4}})} + \frac{B}{(s - e^{-j\frac{3\pi}{4}})}$$

$$A(s - e^{-j\frac{3\pi}{4}}) + B(s - e^{j\frac{3\pi}{4}}) = 1$$

$$A + B = 0$$

$$Ae^{-j\frac{3\pi}{4}} + Be^{j\frac{3\pi}{4}} = 1$$

$$H(s) = \frac{-j\frac{\sqrt{2}}{2}}{s - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} + \frac{j\frac{\sqrt{2}}{2}}{s - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$H(z) = \sum_{i=1}^2 \frac{A_i z}{z - e^{p_i T}} = \frac{-j\frac{\sqrt{2}}{2} z}{\left(z - e^{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\pi}{6}}\right)} + \frac{j\frac{\sqrt{2}}{2} z}{\left(z - e^{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\pi}{6}}\right)}$$

